

慶應義塾大学大学院理工学研究科 入試
2005年 電気電子工学 D5 情報工学

(1)

$$H = -\frac{2}{3} \log_2 \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \log_2 \frac{1}{3} = \log_2 3 - \frac{2}{3} = 0.918 \text{bit}$$

(2)

点灯と消灯の割合が $1/2$ 、 $1/2$ のとき、

$$H_m = -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} = 1 \text{bit}$$

(3)

電球 1 つで知らせることができる情報量は、(2) で求めた $H_m = 1 \text{bit}$ である。一方、10 段階の運転状況の情報量は、

$$-\log_2 \frac{1}{10} = 1 + \log_2 5 = 3.322 \text{bit}$$

である。したがって、3.322 以上の整数である、4 個以上の電球が必要。

(4)

平均通信時間は、

$$\tau = \frac{1}{3} \cdot 1 \text{sec} + \frac{2}{3} \cdot 2 \text{sec} = \frac{5}{3} \text{sec}$$

である。したがって、1 秒あたりの平均送信情報量は、

$$R = \frac{H}{\tau} = \frac{0.918}{5/3} = 0.551 \text{bit/sec}$$

(5)

点灯の割合を p 、消灯の割合を q として、

$$p + q = 1$$

である。平均情報量と、平均通信時間は、

$$H = -p \log_2 p - q \log_2 q$$

$$\tau = p + 2q$$

である。これを用いて、通信速度は、

$$R = \frac{H}{\tau}$$

である。

通信速度の対数を最大化することを考える。

$$\log_2 R = \log_2 H - \log_2 \tau + \lambda(p + q - 1)$$

を、 p と q について偏微分し、0 となるようにおく。

$$\frac{\partial}{\partial p} \log_2 R = \frac{1}{H_0}(-1 - \log_2 p) - \frac{1}{\tau_0} + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial q} \log_2 R = \frac{1}{H_0}(-1 - \log_2 q) - \frac{2}{\tau_0} + \lambda = 0$$

ここで、 H_0 と τ_0 は通信速度を最大にした場合のエントロピーと平均通信時間であり、通信路容量 $C = H_0/\tau_0$ である。

この2式にそれぞれ p と q をかけてから足し合わせると、

$$\frac{1}{H_0}(-1 + H_0) - \frac{\tau_0}{\tau_0} + \lambda = 0$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{H_0}$$

これを元の2式に代入すると、

$$\frac{1}{H_0}(-\log_2 p) - \frac{1}{\tau_0} = 0$$

$$\therefore p = 2^{-C}$$

$$\frac{1}{H_0}(-\log_2 q) - \frac{2}{\tau_0} = 0$$

$$\therefore q = 2^{-2C}$$

これを $p + q = 1$ に代入すると、

$$2^{-C} + 2^{-2C} = 1$$

である。 $W = 2^C$ とおくと、

$$W^{-1} + W^{-2} = 1$$

$$\therefore W^2 - W - 1 = 0$$

$$\therefore W = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618$$

したがって、平均情報量の最大値は、

$$C = \log_2 W = -\log_2 0.618 = -0.694$$

である。

平均情報量が最大となる場合の p と q は、

$$p = 2^{-C} = 0.618$$

$$q = 1 - p = 0.382$$

である。