慶應義塾大学大学院理工学研究科　入試
2006 年　電気電子工学　 D1　 電気回路

(1)

(1-1)

定常状態で、インダクタは短絡、コンデンサは開放されているとみなすと、

$$i(0) = \frac{3\mathrm{V}}{R_1 + R_2} = 1\mathrm{A}$$

$$v(0) = R_1 i(0) = 1\mathrm{V}$$

である。またコンデンサの電圧は変化しないので、

$$\frac{dv}{dt}|_{t=0} = 0$$

である。

(1-2)

C を流れる電流を i_1、R_1 を流れる電流を i_2 とすると、

$$i = i_1 + i_2$$

$$i_1 = C\frac{dv}{dt}$$

$$v + L\frac{di}{dt} + R_2 i = 0$$

$$v = R_1 i_2$$

である。これらから、i、i_1、i_2 を消去すると、

$$R_1 LC\frac{d^2v}{dt^2} + (R_1 R_2 C + L)\frac{dv}{dt} + (R_1 + R_2)v = 0$$

$$\therefore 2\frac{d^2v}{dt^2} + 5\frac{dv}{dt} + 3v = 0$$

(1-3)

　特性方程式、

$$2s^2 + 5s + 3 = 0$$

を解くと、

$$s = -1, -\frac{3}{2}$$

であるから、微分方程式の一般解は、

$$v(t) = Ae^{-t} + Be^{-\frac{3}{2}}$$

である。

　(1) で求めた初期条件より、

$$v(0) = A + B = 1$$

$$\frac{dv}{dt}|_{t=0} = -A - \frac{3}{2}B = 0$$

であるから、

$$A = 3, B = -2$$

である。したがって、

$$v(t) = 3e^{-t} - 2e^{-\frac{3}{2}}$$

である。

別解

　ラプラス変換を用いた解法。

　微分方程式の両辺をラプラス変換する。

$$2(s^2V(s) - sv(0) - v'(0)) + 5(sV(s) - v(0)) + 3V(s) = 0$$

ここに初期値 $v(0) = 1$、$v'(0) = 0$ を代入して変形すると、

$$V(s) = 3\frac{1}{s+1} - 2\frac{1}{s+\frac{3}{2}}$$

であり、これをラプラス逆変換することで電圧が求められる。

$$v(t) = 3e^{-t} - 2e^{-\frac{3}{2}t}$$

(2)

(2-1)

$$\dot{Z} = R_2 + j\omega L + R_1 // \frac{1}{j\omega C}$$

$$\therefore \dot{Z} = R_2 + j\omega L + \frac{R_1}{1 + j\omega C R_1}$$

(2-2)

R_1 と C の並列回路のインピーダンス $\dot{Z}_1$ は、

$$\dot{Z}_1 = \frac{R_1}{1 + j\omega C R_1} L$$

であり、R_2 と L の直列回路のインピーダンス $\dot{Z}_2$ は、

$$\dot{Z}_2 = R_2 + j\omega L$$

である。

端子 a-b 間を流れる電流を $\dot{I}$ とすると、

$$\dot{V}_1 = \dot{Z}_1 \dot{I}$$

$$\dot{V}_2 = \dot{Z}_2 \dot{I}$$

であるから、

$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1} = \frac{(R_2 + j\omega L)(1 + j\omega C R_1)}{R_1}$$

である。

これの偏角が $\pm\frac{\pi}{2}$ になるとき、$\dot{V}_1$ と $\dot{V}_2$ の位相差が $\pm\frac{\pi}{2}$ になる。また、絶対値が 1 になるとき、$|\dot{V}_1| = |dotV_2|$ となる。

したがって、位相差の条件は、

$$\tan\frac{\pi}{2} = \frac{\omega L + \omega C R_1 R_2}{R_2 - \omega^2 L C R_1}$$

であり、振幅の条件は、

$$R_2^2 + \omega^2 L^2 + \omega^4 L^2 C^2 R_1^2 + \omega^2 C^2 R_1^2 R_2^2 = R_1^2$$

である。

そうです。やっつけです。