慶應義塾大学大学院理工学研究科　入試
2008 年　電気電子工学　D1　電気回路

1.

(1)

　スイッチを開く前の定常状態では、インダクタは短絡されているとみなせるので、

$$i(0<t)=\frac{1\Omega}{1\Omega+1\Omega}\frac{3\mathrm{V}}{1\Omega+1\Omega//1\Omega}=1\mathrm{A}$$

である。スイッチを開いた直後は、インダクタにより電流が連続的なので、

$$i(0)=1\mathrm{A}$$

である。

定常状態

　定常状態のインダクタのインピーダンスは $j\omega L$ である。電源が直流、つまり $\omega=0$ のとき、インダクタのインピーダンスは 0 であり、短絡とみなせる。
　定常状態のコンデンサのインピーダンスは、$\frac{1}{j\omega C}$ である。インダクタと同様に電源が直流の場合を考えると、インピーダンスは ∞、つまり開放されているとみなせる。

電流と電圧の連続性

　スイッチを開閉するる前の状態が求められても、スイッチを開閉することで状態が変わってしまうと意味がない。抵抗にかかる電圧と流れる電流は不連続に変化しうるが、インダクタに流れる電流とコンデンサにかかる電圧に関しては変化する。

(2)

　電源と抵抗とインダクタの直列回路である。

$$3\mathrm{V}=(1\Omega+1\Omega)\times i(t)+1\mathrm{H}\times\frac{di(t)}{dt}$$

$$\therefore\frac{di}{dt}+2i=3$$

(3)

　斉次形、

$$\frac{di}{dt} + 2i = 0$$

について、$i = C_1 e^{st}$ とおいて代入すると、特性方程式、

$$s + 2 = 0$$

が得られる。したがって、斉次形の一般解は、

$$i = C_1 e^{-2t}$$

である。ここで、C_1 は任意の定数である。

　次に非斉次形、

$$\frac{di}{dt} + 2i = 3$$

について、$i = A$ とおいて代入すると、

$$A = \frac{3}{2}$$

が得られる。したがって、非斉次形の特殊解は、

$$i = \frac{3}{2}$$

である。

　非斉次形の一般解は、上の二つの解の和であるから、

$$i = C_1 e^{-2t} + \frac{3}{2}$$

である。

　初期値 $i(0) = 1$ より、

$$1 = C_1 + \frac{3}{2}$$

$$\therefore C_1 = -\frac{1}{2}$$

である。したがって、$t \geq 0$ における電流は、

$$i(t) = \frac{1}{2}(3 - e^{-2t})$$

である。

非斉次方程式の一般解

　微分方程式、

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

において、$q(x) = 0$ のとき、これを斉次形という。斉次形の微分方程式は、変数分離によって一般解を求めることができる。

　一方、$q(x) \neq 0$ のとき、この微分方程式を非斉次形という。非斉次形の一般解は、斉次形の一般解と非斉次形の特殊解の和によって求めることができる。

非斉次形の特殊解

非斉次形の特殊解を求める方法として、未定係数法がある。$q(x)=C$ のとき、特殊解を $y=A$ とおいて微分方程式に代入する。A を定めることによって、特殊解が求められる。

$q(x)=e^{\alpha t}$ の場合は、特殊解を $y=Ae^{\alpha t}$ とおく。$q(x)=\sin\omega t$ の場合は、特殊解を $y=A\sin\omega t+B\sin\omega t$ とおく。後は同様に微分方程式に代入して係数を定めることで、特殊解を求めることができる。

未定係数法は右辺が一般の場合に対処できない。このような場合は、定数変化法を用いる。斉次形の一般解の定数係数を、x に関する関数と考ええて、非斉次形の微分方程式に代入する。すると、係数の関数が得られ、これによって特殊解を求めることができる。

別解

ラプラス変換を用いて、この微分方程式を解く。微分方程式の両辺をラプラス変換すると、

$$sI(s)-i(0)+2I(s)=3\frac{1}{s}$$

となる。ここで、$I(s)$ は $i(t)$ のラプラス変換を表す。これに初期値 $i(0)=1$ を代入し変形すると、

$$I(s)=\frac{1}{2}\left(3\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}\right)$$

となる。これをラプラス逆変換することで、電流 $i(t)$ が得られる。

$$i(t)=\frac{1}{2}(3-e^{-2t})$$

ラプラス変換

初期値が与えられた微分方程式を、初期値問題という。初期値問題を解く際には、ラプラス変換を用いると便利である。

2.

(1)

抵抗 R とインダクタ L とコンデンサ C の直列回路の複素インピーダンス $\dot{Z}$ は、

$$\dot{Z}=R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)$$

である。$\dot{E}$ と $\dot{I}$ の位相差が $\pi/4$ であるから、

$$\arg\left(\frac{\dot{E}}{\dot{I}}\right)=\arg\dot{Z}=\pm\frac{\pi}{4}$$

である。

$$\arg\dot{Z}=\tan^{-1}\left(\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

であるから、

$$\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \pm \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \omega L - \frac{1}{\omega C} = \pm R$$

これが求める条件である。

フェーザ法

電圧と電流を複素数として扱うことで、定常回路の解析を容易にする。交流電圧と交流電流の振幅の比は、複素インピーダンスの絶対値で表される。交流電圧と交流電流の位相の差は、複素インピーダンスの偏角で表さされる。

(2)

(1) で求めた複素インピーダンスにより

$$|\dot{I}| = \left| \frac{\dot{E}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \right|$$

$$\therefore |\dot{I}| = \frac{|\dot{E}|}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

である。

抵抗成分は非負の値しか取らないが、リアクタンス成分は負の値もとることができる。リアクタンス成分が 0 のとき振幅が最大になるので、

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

$$\therefore \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

である。

このときの $|\dot{I}|$ は、

$$|\dot{I}| = \frac{|\dot{E}|}{R}$$

である。

リアクタンス

複素インピーダンス $R + jX$ の、R を抵抗またはレジスタンスといい、X をリアクタンスという。抵抗は非負の値しか取らないが、リアクタンス成分は負の値にもなりうる。リアクタンス成分が正のとき、誘導性であり、コイルのようにふるまう。逆にリアクタンス成分が負のとき、容量性であり、コンデンサのようにふるまう。

(3)

電源 $e_1(t) = E_m \sin \omega t$ と、$e_2(t) = \frac{E_m}{3} \sin 3\omega t$ を独立に考える。$e_1(t)$ に対して流れる電流の振幅 $|\dot{I}_1|$ は、(2) で求めたように、

$$|\dot{I}_1| = \frac{|\dot{E}|}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

である。同様に、$e_2(t)$ に対して流れる電流の振幅 $|\dot{I}_2|$ は、

$$|\dot{I}_2| = \frac{\frac{1}{3}|\dot{E}|}{\sqrt{R^2 + (3\omega L - \frac{1}{3\omega C})^2}}$$

である。

これらが等しいので、

$$\frac{|\dot{E}|}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{\frac{1}{3}|\dot{E}|}{\sqrt{R^2 + (3\omega L - \frac{1}{3\omega C})^2}}$$

$$\therefore R^2 + 10\omega^2 L^2 - 2\frac{L}{C} = 0$$

が求める条件である。

重ねの理

複数の電源から流れる電流は、その電源単体の場合に流れる電流の和である。複雑な電源でも、分解して、それぞれの電流を求め、足し合わせることで全体の電流が求められる。

複雑な周期波形の電圧に対する電流も、フーリエ級数に展開して、それらに対して電流を求めて足し合わせることで求められる。

傾向と対策

2004 年から 2008 年の全ての年で、フェーザ法を用いた定常回路解析の問題が出題されている。電気回路ノートの 7 章を理解すれば解ける。

2005 年を除く全ての年で、微分方程式による過渡解析の問題が出題されている。電気回路ノートの 5 章を理解すれば解ける。

そして、それ以外の回路の問題は出題されていないので、電気回路ノートの 5 章と 7 章に絞り込んで勉強すれば大丈夫。微分方程式の問題が出題されるときはいつも初期値問題なので、6 章のラプラス変換もやっておくと楽に解けるかもしれない。