東京大学大学院工学系研究科　電気工学・電子工学専攻　入試
平成 17 年　数学　第 1 問

(1)

$m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=0$ の特性方程式 $ms^2+\beta s+k=0$ を解くと、

$$s=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4km}}{2m}$$

特性方程式の判別式 $D=\beta^2-4km$ の正負によって、微分方程式の解は異なり、

$$x=\begin{cases} A\exp\left(\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4km}}{2m}t\right)+B\exp\left(\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4km}}{2m}t\right) & ;D>0 \\ A\exp\left(\frac{-\beta}{2m}t\right)+Bt\exp\left(\frac{-\beta}{2m}t\right) & ;D=0 \\ \exp\left(\frac{-\beta}{2m}t\right)\left\{A\cos\left(\frac{\sqrt{4km-\beta^2}}{2m}t\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{4km-\beta^2}}{2m}t\right)\right\} & ;D<0 \end{cases}$$

ここで、A と B は積分定数で、初期条件によって決定される。

$$x=\begin{cases} \frac{mv_0}{\sqrt{\beta^2-4km}}\left\{\exp\left(\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4km}}{2m}t\right)-\exp\left(\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4km}}{2m}t\right)\right\} & ;D>0 \\ v_0t\exp\left(\frac{-\beta}{2m}t\right) & ;D=0 \\ \frac{2mv_0}{\sqrt{4km-\beta^2}}\exp\left(\frac{-\beta}{2m}t\right)\sin\left(\frac{\sqrt{4km-\beta^2}}{2m}t\right) & ;D<0 \end{cases}$$

(2)

解が振動解であるのは、$D<0$ の場合である。

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2mv_0}{\sqrt{4km-\beta^2}}\left\{-\frac{\beta}{2m}e^{-\frac{\beta}{2m}t}\sin\frac{\sqrt{4km-\beta^2}}{2m}t+\frac{\sqrt{4km-\beta^2}}{2m}e^{-\frac{\beta}{2m}t}\cos\frac{\sqrt{4km-\beta^2}}{2m}t\right\}=0$$

$$\therefore\tan\frac{\sqrt{4km-\beta^2}}{2m}t=\frac{\sqrt{4km-\beta^2}}{\beta}$$

したがって、初めて速度がゼロになる時刻は、

$$t=\frac{2m}{\sqrt{4km-\beta^2}}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{\sqrt{4km-\beta^2}}{\beta}$$

ここで、Tan^{-1} は $\tan^{-1}$ のうち、0 以上で π 未満のものを表す。

(3)

$m = 1, \beta = 6, k = 34, a_0 = 0$ とした場合の解は、$D < 0$ であるから (1) より、

$$x = \frac{2mv_0}{\sqrt{4km - \beta^2}} \exp\Big(\frac{-\beta}{2m}t\Big)\sin\Big(\frac{\sqrt{4km-\beta^2}}{2m}t\Big)$$

初期条件より $v_0 = 0$ であるから、求める微分方程式の同次形の特殊解は、

$$x = 0$$

次に、非同次形、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 34x = 170\sin 2t$$

の特解を求めるために、$x = \alpha\cos 2t + \beta\sin 2t$ とおいて、これを代入する。

$$(-4\alpha + 12\beta + 34\alpha)\cos 2t + (-4\beta - 12\alpha + 34\beta)\sin 2t = 170\sin 2t$$

三角関数の係数の比較により、

$$-4\alpha + 12\beta + 34\alpha = 0$$

$$-4\beta - 12\alpha + 34\beta = 170$$

これを解いて、

$$\alpha = -\frac{170}{87}, \beta = \frac{425}{87}$$

以上より、非同次形の特解は、

$$x = -\frac{170}{87}\cos 2t + \frac{425}{87}\sin 2t$$

同次形の一般解と、非同次形の特解から、求める解を得られる。

$$x = -\frac{170}{87}\cos 2t + \frac{425}{87}\sin 2t$$