東京大学大学院工学系研究科　電気工学・電子工学専攻　入試
平成 17 年　数学　第 2 問

(1)

特性方程式は、

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^3 - (a+b+c)\lambda^2 + (ab+bc+ca-2a^2-b^2)\lambda - a(a-b)(b-c)$$

したがって、解と係数の関係より、

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a+b+c$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = a(a-b)(b-c)$$

解と係数の関係

2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解を p と q とすると、

$$x^2+ax+b = (x-p)(x-q) = x^2+(p+q)x+pq$$

すなわち、

$$a = p+q$$

$$b = pq$$

という関係が成立する。一般の n 次方程式の場合も同様に、n-1 次の係数には解の和が、定数項には解の積が生じる。

別解

A を対角化しトレースをとると、

$$\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

トレースは交換法則が成立するので、

$$\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(P^{-1}PA) = \mathrm{Tr}A = a+b+c$$

$$\therefore \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a+b+c$$

A を対角化し行列式を求めると、

$$\det(P^{-1}AP) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$$

$$\det(P^{-1}AP) = \det P^{-1} \det A \det P = \det A = a(b-c)(a-b)$$

$$\therefore \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = a(a-b)(b-c)$$

(2)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} b(c-b) & a(b-c) & 0 \\ a(b-c) & a(c-a) & a(a-b) \\ 0 & a(a-b) & a(b-a) \end{bmatrix}$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{a(a-b)(b-c)}$$

(3)

直交行列の性質により、

$$\det(P) = \det(P^T)$$

$$PP^T = I$$

したがって、

$$\det(PP^T) = \det(P)\det(P^T) = \{\det(P)\}^2 = \det(I) = 1$$

$$\therefore |\det(P)| = 1$$

(4)

対角行列の逆行列は、

$$(P^TAP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}(P^T)^{-1} = P^TA^{-1}P$$

したがって、

$$\begin{aligned} x^TA^{-1}x =& (Py)^TA^{-1}(Py) \\ =& y^TP^TA^{-1}Py \\ =& y^T(P^TAP)^{-1}y \\ =& \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ =& \frac{y_1^2}{\lambda_1} + \frac{y_2^2}{\lambda_2} + \frac{y_3^2}{\lambda_3} \end{aligned}$$

(5)

積分変数を変換するためにヤコビ行列式 $|J|$ を計算する。

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = |P| = 1$$

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^T A^{-1} x) dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(\frac{y_1^2}{\lambda_1} + \frac{y_2^2}{\lambda_2} + \frac{y_3^2}{\lambda_3})|J| dy_1 dy_2 dy_3 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z_1^2)\exp(-z_2^2)\exp(-z_3^2)\sqrt{\lambda_1}dz_1\sqrt{\lambda_2}dz_2\sqrt{\lambda_3}dz_3 \\
&= \sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-z_1^2)dz_1\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-z_2^2)dz_2\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-z_3^2)dz_3 \\
&= \sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\pi^3}
\end{aligned}$$