東京大学大学院工学系研究科　電気工学・電子工学専攻　入試
平成17年　物理　第3問

(1)

i_3 はインダクタにより、スイッチ S_1 を閉じた瞬間には変化しないので、

$$i_3(0) = 0$$

オームの法則により、

$$i_1(0) = i_2(0) = \frac{10\mathrm{V}}{5\Omega + 2\Omega + 3\Omega} = 1\mathrm{A}$$

(2)

回路方程式は、

$$10\mathrm{V} = 5\mathrm{H} \times \frac{di_3}{dt} + (2\Omega + 3\Omega) \times i_1$$

$$10\mathrm{V} = 5\Omega \times i_2 + (2\Omega + 3\Omega) \times i_1$$

$$i_1 = i_2 + i_3$$

以上の3式から i_1 と i_2 を消去すると、

$$2\frac{di_3}{dt} + i_3 = 2$$

この微分方程式を解けば、i_3 が得られる。

(右辺) $= 0$ とした同次形の一般解は、特性方程式 $2s + 1 = 0$ より、

$$s = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore i_3 = ke^{-\frac{t}{2}}$$

ここで、k は任意定数である。

次に非同次形の微分方程式の特解を $i_3 = A$ と仮定して、これを微分方程式に代入すると、

$$A = 2$$

$$\therefore i_3 = 2$$

同次形の一般解と非同次形の特解の和が、求める微分方程式の一般解で、

$$i_3 = ke^{-\frac{t}{2}} + 2$$

初期値 $i_3(0) = 0$ より、$k = -2$ が得られ、

$$i_3 = 2(1 - e^{-\frac{t}{2}})$$

先の連立微分方程式から i_1 を消去すると、

$$i_2 = \frac{di_3}{dt}$$

$$\therefore i_2 = e^{-\frac{t}{2}}$$

また、

$$i_1 = i_2 + i_3 = 2 - e^{-\frac{t}{2}}$$

(グラフ略)

別解

ラプラス変換を用いた別解を記す。

回路方程式をラプラス変換すると、

$$\frac{10}{s} = 5\Big(sI_3 - i_3(0)\Big) + 5I_1$$

$$\frac{10}{s} = 5I_2 + 5I_1$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

ここで、I_1、I_2、I_3 は、それぞれ i_1、i_2、i_3 のラプラス変換である。

これを解くと、

$$I_1 = 2\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{2}}$$

$$I_2 = \frac{1}{s + \frac{1}{2}}$$

$$I_3 = 2\frac{1}{s} - 2\frac{1}{s + \frac{1}{2}}$$

が得られる。

それぞれをラプラス逆変換することで、上と同様の解が得られる。

(3)

スイッチ S_2 を閉じる直前の電流の値は、

$$i_1(t_1-0)=\lim_{t\to\infty}(2-e^{-\frac{t}{2}})=2\mathrm{A}$$

$$i_2(t_1-0)=\lim_{t\to\infty}(e^{-\frac{t}{2}})=0\mathrm{A}$$

$$i_3(t_1-0)=\lim_{t\to\infty}\{2(1-e^{-\frac{t}{2}})\}=2\mathrm{A}$$

i_3 はインダクタにより、スイッチ S_2 を閉じた瞬間には変化しないので、

$$i_3(t_1)=2\mathrm{A}$$

キルヒホッフの法則により、

$$i_1=i_2+i_3=i_2+2\mathrm{A}$$

$$10\mathrm{V}=5\Omega\times i_2+2\Omega\times i_1$$

これを解いて、

$$i_1(t_1)=\frac{20}{7}\mathrm{A}$$

$$i_2(t_2)=\frac{6}{7}\mathrm{A}$$

(4)

回路方程式は、

$$10\mathrm{V}=5\Omega\times i_2+2\Omega\times i_1$$

$$10\mathrm{V}=5\mathrm{H}\times\frac{di_3}{dt}+2\Omega\times i_1$$

$$i_1=i_2+i_3$$

であり、これを (3) の初期条件の下で解けば求める解が得られる。
(2) と同様に微分方程式を解くと、

$$i_1=-\frac{15}{7}e^{-\frac{2}{7}(t-t_1)}+5$$

$$i_2=\frac{6}{7}e^{-\frac{2}{7}(t-t_1)}$$

$$i_3=-3e^{-\frac{2}{7}(t-t_1)}+5$$

(グラフ略)

別解

ラプラス変換を用いた別解を記す。

回路方程式をラプラス変換すると、

$$\frac{10}{s} = 5I_2 + 2I_1$$

$$\frac{10}{s} = 5\Big(sI_3 - i_3(t_1)\Big) + 2I_1$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

これを解くと、

$$I_1 = 5\frac{1}{s} - \frac{15}{7}\frac{1}{s+\frac{2}{7}}$$

$$I_2 = -\frac{6}{7}\frac{1}{s+\frac{2}{7}}$$

$$I_3 = 5\frac{1}{s} - 3\frac{1}{s+\frac{2}{7}}$$

が得られる。

それぞれをラプラス逆変換することで、上と同様の解が得られる。