東京大学大学院工学系研究科　電気工学・電子工学専攻　入試
平成 17 年　物理　第 5 問

(1)

$$J_G = \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{M}{L} \cdot x^2 dx = \frac{1}{12} M L^2$$

(2)

$$J_O = J_G + M\left(\frac{L}{2} - \lambda L\right)^2 = \left(\frac{1}{3} - \lambda + \lambda^2\right) M L^2$$

(3)

運動方程式は、

$$\begin{aligned} J_O \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -Mg\sin\theta\left(\frac{L}{2} - \lambda L\right) \\ &\fallingdotseq -Mg\left(\frac{L}{2} - \lambda L\right)\theta \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3(1-2\lambda)}{2(1-3\lambda+3\lambda^2)} \cdot \frac{g}{L} \cdot \theta$$

$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{2(1-3\lambda+3\lambda^2)}{3(1-2\lambda)} \cdot \frac{L}{g}}$$

(4)

点 E' を原点にとり、重力の方向を正として x 軸を設定する。物体の対称性から、重心は x 軸上に存在する。求める重心の位置は、

$$x_G = \frac{\frac{L}{2} \cdot M + L \cdot m}{M + m} = \frac{2m + M}{2m + 2M} \cdot L$$

(5)

円盤が回転できることから、円盤を質点とみなして棒の慣性モーメントを求めることができる。

$$J_O^{'} = \int_0^L \frac{M}{L} \cdot x^2 dx + L^2 m = \Big(\frac{1}{3}M + m\Big) L^2$$

この場合の運動方程式は、

$$J_O^{'} \frac{d^2\theta}{dt^2} = -(M+m) g \sin\theta \cdot x_G$$

$$\therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-\frac{2m+M}{2} \cdot g}{(\frac{1}{3}M + m)L}$$

したがって、求める周期は、

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{2(M+3m)}{3(M+2m)} \cdot \frac{L}{g}}$$

(6)

円盤が固定されている場合は、棒と円盤をまとめて一つの剛体として、慣性モーメントを求める。棒の部分については、(2) において、$\lambda = 0$ とおくことで、

$$J_O|_{\lambda=0} = \frac{1}{3} M L^2$$

また、円盤の部分については、

$$J_D = mL^2 + \iint \frac{m}{\pi R^2} dr \cdot r d\theta \cdot r^2 = mL^2 + \frac{1}{2} m R^2$$

これらを合わせた物体の慣性モーメントは、

$$J = J_O|_{\lambda=0} + J_D = \frac{1}{3} M L^2 + mL^2 + \frac{1}{2} m R^2$$

(3)、(5) と同様に運動方程式を立てることで周期 T_2 を求めることができる。

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{2ML^2 + 6mL^2 + 3mR^2}{3(2m+M)gL}}$$

和の定理

部分系ごとにとった慣性モーメント $I_z^{(k)}$ の和が全体の慣性モーメント I_z になる。

$$I_z = \sum_k I_z^{(k)}$$

ただし、全ての慣性モーメントは z 軸に対して求める。