東京大学大学院新領域創成科学研究科　基盤情報学専攻　入試
平成 18 年　専門科目　第 2 問

(1)

L と R の直列接続のインピーダンス Z_1 は、

$$Z_1 = j\omega L + R$$

である。これを用いて、Z_2 は、

$$Z_2 = j\omega L + R//Z_1 = \frac{2R^3 + \omega^2 L^2 R}{4R^2 + \omega^2 L^2} + j\frac{5\omega L R^2 + \omega^3 L^3}{4R^2 + \omega^2 L^2}$$

したがって、抵抗分は、

$$\mathrm{Re}\{Z_2\} = \frac{2R^3 + \omega^2 L^2 R}{4R^2 + \omega^2 L^2}$$

であり、リアクタンス分は、

$$\mathrm{Im}\{Z_2\} = \frac{5\omega L R^2 + \omega^3 L^3}{4R^2 + \omega^2 L^2}$$

である。

(2)

$\frac{\omega L}{R} << 1$ を用いて近似する。抵抗分について、

$$\mathrm{Re}\{Z_2\} = \frac{R\left\{2 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2\right\}}{4 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2} \fallingdotseq \frac{1}{2}R$$

であり、リアクタンス分について、

$$\mathrm{Im}\{Z_2\} = \frac{\omega L\left\{5 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2\right\}}{4 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2} \fallingdotseq \frac{5}{4}\omega L$$

である。

したがって、

$$Z_2 \fallingdotseq \frac{1}{2}R + j\frac{5}{4}\omega L$$

定性的な理解

低周波域でのインピーダンスを問う問題である。低周波でのインダクタのインピーダンスは低く、ただの導線のように見える。端子から遠い方のインダクタが導線に見えると、抵抗が並列接続されているように見え、抵抗分が $\frac{1}{2}R$ になる。この抵抗分に端子側のインダクタが直列接続され、$\frac{1}{2}R + j\omega L$ 程度と考えられる。実際に計算してみるとは、リアクタンス分は $j\frac{5}{4}\omega L$ で、これは端子から遠い方のインダクタの成分が含まれているためと考えられる。

(3)

$\frac{R}{\omega L} << 1$ を用いて近似する。抵抗分について、

$$\mathrm{Re}\{Z_2\} = \frac{R\left\{2\left(\frac{R}{\omega L}\right)^2+1\right\}}{4\left(\frac{R}{\omega L}\right)^2+1} \fallingdotseq R$$

であり、リアクタンス分について、

$$\mathrm{Im}\{Z_2\} = \frac{\omega L\left\{5\left(\frac{R}{\omega L}\right)^2+1\right\}}{4\left(\frac{R}{\omega L}\right)^2+1} \fallingdotseq \omega L$$

である。

したがって、

$$Z_2 \fallingdotseq R + j\omega L$$

定性的な理解

高周波域でのインピーダンスを問う問題である。高周波ではインダクタのインピーダンスは高く、開放されているように見える。端子から遠い方のインダクタが開放されているとみると、インダクタ L と抵抗 R の直列接続に見え、インピーダンスが $R + j\omega L$ となる。

(4)

(1)、(2)、(3) より、

$$|Z_2| = \begin{cases} \frac{1}{2}R & ;\omega = 0 \\ \sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{25}{16}\omega^2 L^2} & ;\omega << \frac{R}{L} \\ \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} & ;\frac{R}{L} << \omega \\ \infty & ;\omega \to \infty \end{cases}$$

$$\arg Z_2 = \begin{cases} 0 & ;\omega = 0 \\ \tan^{-1}\frac{5\omega L}{2R} & ;\omega << \frac{R}{L} \\ \tan^{-1}\frac{\omega L}{R} & ;\frac{R}{L} << \omega \\ \frac{\pi}{2} & ;\omega \to \infty \end{cases}$$

これを元に絶対値と偏角の概形を描けば良い。(グラフ略)

(5)

$n=1$ で、

$$Z_1 = j\omega L + R$$

であり、$n \geq 1$ に対して、インピーダンスは以下の漸化式で表現できる。

$$Z_{n+1} = j\omega L + R//Z_n = j\omega L + \frac{RZ_n}{R+Z_n}$$

複素数の収束