# 東京大学大学院工学系研究科　電気工学・電子工学専攻　入試
# 平成 18 年　数学　第 1 問

## (1)

(*) の両辺に $\frac{dx}{dt}$ を乗じて変形すると、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{2}{x^2}\frac{dx}{dt}$$

両辺を積分すると、

$$\int d\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -2\int \frac{1}{x^2}dx + C_1$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{x} + C_1$$

ここで $C_1$ は積分定数で、初期条件より $C_1 = 2 - \frac{2}{x_0}$ と求められる。

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \sqrt{2 + \frac{2}{x} - 2x_0}$$

なお、平方根をとる際に復号が生じるが、初期条件より負の場合は不適である。

### 公式

合成関数の微分であるが、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}$$

## (2)

$x_0 = 1$ とすると、

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{x}}$$

変数分離して積分すると、

$$\int \sqrt{x}dx = \sqrt{2}\int dt + C_2$$

$$\frac{2}{3}x^{3/2} = \sqrt{2}t + C_2$$

ここで $C_2$ は積分定数で、初期条件より $C_2 = 2/3$ と求められる。

$$\therefore x = (\frac{3}{2}\sqrt{2}t + 1)^{2/3}$$

## (3)

x(t) が極値をとるのは、

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x_0}} = 0$$

の時である。これを $x$ について解くと、

$$x = \frac{x_0}{1 - x_0}$$

で極値をとることが分かる。$\frac{dx}{dt}$ は、$x$ について単調減少で、$x < \frac{x_0}{1-x_0}$ では $\frac{dx}{dt} > 0$ である。したがって、この極値は最大値である。