東京大学大学院工学系研究科　電気工学・電子工学専攻　入試
平成 18 年　数学　第 2 問

(1)

$$\det A = a^3 + b^3 + b^3 - (ab^2 + ab^2 + ab^2) = a^3 + 2b^3 - 3ab^2$$

(2)

$$\begin{aligned}
A^{-1} =& \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & b \\ b & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & b \\ b & a \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & b \\ b & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & a \\ b & b \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \end{bmatrix} \\
=& \frac{1}{a^3 + 2b^3 - 3ab^2}\begin{bmatrix} a^2 - b^2 & b^2 - ab & b^2 - ab \\ b^2 - ab & a^2 - b^2 & b^2 - ab \\ b^2 - ab & b^2 - ab & a^2 - b^2 \end{bmatrix} \\
=& \frac{a - b}{a^3 + 2b^3 - 3ab^2}\begin{bmatrix} a + b & -b & -b \\ -b & a + b & -b \\ -b & -b & a + b \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

逆行列の公式

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{detA}}[\Delta_{ji}]$$

Δ_{ij} は、行列 A の余因子である。添え字の付き方に注意。単に成分を余因子に置き換えたものではなく、それを更に転置したものである。

対称行列の性質

対称行列の逆行列は対称行列。対称行列の成分について、$a_{ij} = a_{ji}$ であるから、余因子について $\Delta_{ji} = \Delta_{ij}$ である。

(3)

固有方程式は、

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^3 - 3a\lambda^2 + 3(a^2 - b^2)\lambda - (a^3 - 3ab^2 + 2b^3) = 0$$

これを解くと、

$$\lambda = a - b, a + 2b$$

$\lambda = a - b$ に属する固有ベクトルは、

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = a + 2b$ に属する固有ベクトルは、

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(4)

この問題における部分空間 $W = \{\mathbf{x} | A\mathbf{x} = c\mathbf{x}\}$ は、$\mathrm{Ker}(A - cE)$ である。行列 $A - cE$ は 3×3 行列であるから、

$$3 = \mathrm{dimKer}(A - cE) + \mathrm{dimIm}(A - cE)$$

$$\therefore 3 = \mathrm{dim}W + \mathrm{rank}(A - cE)$$

なる関係が成立する。

したがって、W の次元が 1 次元となるのは、

$$\mathrm{rank}(A - cE) = 2$$

の時である。

行基本変形を繰り返すと、

$$A - cE \longrightarrow \begin{bmatrix} a - c & b & b \\ 0 & a - c + b & b \\ 0 & 0 & \frac{(a-c+b)^2 - b^2}{a-c+b} \end{bmatrix}$$

であるから、

$$\frac{(a - c + b)^2 - b^2}{a - c + b} = 0$$

$$\therefore a - c + 2b = 0$$

が条件である。

このとき、

$$A - cE \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であるから、基底は、

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

である。

行列の核と像

$m \times n$ 行列 A に対して、$A\mathbf{x} = 0$ の解のなす集合を、行列 A の核という。

$$\mathrm{Ker}A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | A\mathbf{x} = 0\}$$

また、行列 A と数ベクトルの積の集合を、行列 A の像という。

$$\mathrm{Im}A = \{A\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

次元公式

$m \times n$ 行列 A の核と像の次元の間には、次の関係がある。

$$n = \mathrm{dimKer}A + \mathrm{dimIm}A$$

また、像の次元は、行列の階数に等しく、

$$\mathrm{dimIm}A = \mathrm{rank}A$$

である。

(5)

(4) と同様に考えると、W の次元が 2 次元となるのは、

$$\mathrm{rank}(A - cE) = 1$$

の時である。

行基本変形を繰り返すと、

$$A - cE \longrightarrow \begin{bmatrix} a-c & b & b \\ 0 & (a-c)^2 + b^2 & (a-c)b + b^2 \\ 0 & (a-c)b + b^2 & (a-c)^2 + b^2 \end{bmatrix}$$

であるから、

$$(a-c)^2 - b^2 = 0 \quad \text{かつ} \quad (a-c)b - b^2 = 0$$

が条件である。

$$\therefore a - c - b = 0$$

このとき、

$$A - cE \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であるから、基底は、

$$\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

である。

(6)

$$P=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

とおくと、

$$P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\1&1&-2\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}a-b&0&0\\0&a+2b&0\\0&0&-a-b\end{bmatrix}$$

である。

$$(P^{-1}AP)^n=P^{-1}AP\cdot P^{-1}AP\ldots P^{-1}AP=P^{-1}A^nP$$

$$\begin{aligned}A^n=&P\begin{bmatrix}a-b&0&0\\0&a+2b&0\\0&0&a-b\end{bmatrix}^n P^{-1}\\=&P\begin{bmatrix}(a-b)^n&0&0\\0&(a+2b)^n&0\\0&0&(a-b)^n\end{bmatrix}P^{-1}\\=&\frac{1}{3}\begin{bmatrix}(a+2b)^n+2(a-b)^n&(a+2b)^n-(a-b)^n&(a+2b)^n-(a-b)^n\\(a+2b)^n-(a-b)^n&(a+2b)^n+2(a-b)^n&(a+2b)^n-(a-b)^n\\(a+2b)^n-(a-b)^n&(a+2b)^n-(a-b)^n&(a+2b)^n+2(a-b)^n\end{bmatrix}\end{aligned}$$