

東京大学大学院工学系研究科 電気工学・電子工学専攻 入試
平成 18 年 物理 第 5 問

(1)

接線方向の運動方程式は、

$$m(a+b)\frac{d^2\theta}{dt^2} = mg \sin \theta - F$$

(2)

法線方向の運動方程式は、

$$m(a+b)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mg \cos \theta - N$$

(3)

円筒 B の重心を中心とした慣性モーメント I は、

$$I = \iint \frac{m}{\pi b^2} dr \cdot r d\theta \cdot r^2 = \frac{1}{2} mb^2$$

回転に関する運動方程式は、

$$I \frac{d\omega}{dt} = F \cdot b$$

(4)

円筒は滑らないので、その転がる円弧の長さから、

$$a d\theta = b(\omega dt - d\theta)$$

$$\therefore (a+b)\frac{d\theta}{dt} = b\omega$$

(5)

(1)、(3)、(4) で得られた式より、 F と ω を消去すると、

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{2g}{3(a+b)} \sin \theta$$

両辺に $2\frac{d\theta}{dt}$ をかけて、与えられた公式を利用すると、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{4g}{3(a+b)} \sin\theta d\theta$$

両辺の積分を取ると、

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{4g}{3(a+b)} \int \sin\theta d\theta + C$$

ここで、 C は積分定数であり、初期条件より $\frac{4g}{3(a+b)}$ と求められる。

$$\therefore \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{4g}{3(a+b)}(1 - \cos\theta)$$

これを (2) で得られた式に代入し、更に $N = 0$ の条件を用いると、

$$\cos\theta_a = \frac{4}{7}$$