東京大学大学院工学系研究科　電気工学・電子工学専攻　入試
平成 19 年　数学　第 1 問

(1)

$z = y^{-1}$ という変換を用いると、

$$y = z^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = -z^{-2}\frac{dz}{dx}$$

$$\therefore (x^2+1)\frac{dz}{dx} - 4xz = -4ax \qquad (**)$$

ベルヌーイ方程式

ベルヌーイ方程式とは、

$$y^{'} + p(x)y = q(x)y^n$$

という形の微分方程式である。$n = 0, 1$ の時は線形微分方程式である。そうでない場合は、$z = y^{1-n}$ と変換することで、z に関する線形微分方程式になる。

(2)

$a = 0$ のとき、(**) は斉次形となる。

$$(x^2+1)\frac{dz}{dx} - 4xz = 0$$

$$\int \frac{1}{z}dz = \int \frac{4x}{x^2+1}dx + C_1$$

$$\log|z| = 2\log|x^2+1| + C_1$$

$$\log\left|\frac{z}{e^{C_1}(x^2+1)^2}\right| = 0$$

$$\therefore z = C_2(x^2+1)^2$$

ここで、C_1 および $C_2 = \pm e^{C_1}$ は積分定数である。求める解は、

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{C_2(x^2+1)^2}$$

(3)

(2) で得られた解の係数 C_2 を $C_2(x)$ と置き換えて、

$$z = C_2(x)(x^2+1)^2$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}C_2(x)\cdot(x^2+1)^2 + C_2(x)4x(x^2+1)$$

これを (*) に代入すると、

$$\frac{d}{dx}C_2(x) = -4a\frac{x}{(x^2+1)^3}$$

両辺を積分すると、

$$C_2(x) = -4a\int\frac{x}{(x^2+1)^3}dx = \frac{a}{(x^2+1)^2} + C_3$$

したがって、一般解は、

$$z = C_2(x)(x^2+1)^2 = a + C_3(x^2+1)^2$$

$$\therefore y = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+C_3(x^2+1)^2}$$

係数関数の積分

思いつかない場合は、以下のように置換積分する。

$$\begin{aligned}
C_2(x) =& -4a\int\frac{x}{(x^2+1)^3}dx \\
=& -4a\int\frac{\pm\sqrt{t-1}}{t^3}\cdot\frac{1/2}{\pm\sqrt{t-1}}dt(t=x^2+1\text{ による置換積分}) \\
=& -2a\int\frac{dt}{t^3} \\
=& a\frac{1}{t^2}+C_3 \\
=& \frac{a}{(x^2+1)^2}+C_3
\end{aligned}$$

非斉次方程式の一般解

斉次形の微分方程式の一般解と、非斉次形の微分方程式の特殊解を求める。これらの和が、非斉次形の微分方程式の一般解である。

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

という微分方程式を解くことを考える。

斉次形の一般解を $\tilde{y}$ とすると、

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} + P(x)\tilde{y} = 0$$

非斉次形の特殊解を Y とすると、

$$\frac{dY}{dx} + P(x)Y = Q(x)$$

これらの和を元の微分方程式に代入すると、

$$\frac{d}{dx}(\tilde{y} + Y) + P(x)(\tilde{y} + Y) = Q(x)$$

$$(\text{左辺}) = \left(\frac{d\tilde{y}}{dx} + P(x)\tilde{y}\right) + \left(\frac{dY}{dx} + P(x)Y\right) = Q(x)$$

したがって、$\tilde{y} + Y$ は、解くべき微分方程式の解である。また、$\tilde{y}$ には 1 つの任意定数が含まれているので、$\tilde{y} + Y$ にも 1 つの任意定数が含まれており、これは一般解である。