東京大学大学院工学系研究科　電気工学・電子工学専攻　入試
平成 19 年　数学　第 2 問

(1)

$$|\mathrm{A}| = 0 - 4 + 2 - (2 + 0 - 2) = -2$$

行列式

$$\det(a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$$

ここで、Δ_{ij} は余因子といい、a_{ij} についての小行列式に $(-1)^{i+j}$ をかけたものである。なお、小行列式とは、n 次の行列から第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $n-1$ 次の行列式のことである。

2 次行列、3 次行列の場合は、斜め方向の成分を掛け合わせることで行列式が求められる。

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (ceh + bdi + afh)$$

行列式の性質

転置行列の行列式は、元の行列の行列式に等しい。

$$\det a_{ij} = \det a_{ji}$$

したがって、以下の性質は、行と列をそのまま読み替えても成立する。

- 行列のある 2 行を交換すると、行列式は -1 倍される。
- 行列のある 1 行に定数 c をかけると、行列式は c 倍される。
- 行列の 2 行が等しいと、行列式は 0 になる。
- 行列のある 1 行に他の 1 行を足し合わせても、行列式は変わらない。

(2)

固有方程式は、

$$|\lambda \mathrm{E} - A| = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

ここで、λ は求める固有値、E は単位行列である。

$$(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\therefore \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$$

各固有値に属する固有ベクトルは、$[-3, 4, 2]^T$、$[1, -2, 2]^T$、$[0, 1, -1]^T$ であるから、

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

固有値

n 次の正方行列 A に対して、$\mathrm{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ を満たす λ を A の固有値という。$\mathbf{x}$ を λ に対応する固有ベクトルという。

固有値の性質

$\phi(\lambda) = |\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E}|$ が正方行列 A の固有多項式であるとすると、$\phi(\mathrm{A}) = 0$
正方行列 A の互いに異なる固有値に対応する固有ベクトルは 1 次独立である。

(3)

$\vec{z}$ の定義より、

$$\vec{z} = \mathrm{P}^{-1}\vec{y}$$

$$\therefore \vec{z'} = \mathrm{P}^{-1}\vec{y'} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\vec{y} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\vec{z}$$

であるから、

$$\frac{dz_1}{dx} = \lambda_1 z_1 = -z_1$$

$$\frac{dz_2}{dx} = \lambda_2 z_2 = z_2$$

$$\frac{dz_3}{dx} = \lambda_3 z_3 = 2z_3$$

これを解いて、

$$z_1 = \alpha e^{-x}$$

$$z_2 = \beta e^{x}$$

$$z_3 = \gamma e^{2x}$$

(4)

$$\vec{y} = \mathrm{P}\vec{z} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha e^{-x} \\ \beta e^{x} \\ \gamma e^{2x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\alpha e^{-x} + \beta e^{x} \\ 4\alpha e^{-x} - 2\beta e^{x} + \gamma e^{2x} \\ 2\alpha e^{-x} + 2\beta e^{x} - \gamma e^{2x} \end{bmatrix}$$

$x = 0$ の境界条件より、

$$y_1 = -3\alpha + \beta = -2$$

$$y_2 = 4\alpha - 2\beta + \gamma = 3$$

$$y_3 = 2\alpha + 2\beta - \gamma = 3$$

$$\therefore \alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1$$

以上より、

$$y_1 = -3e^{-x} + e^{x}$$

$$y_2 = 4e^{-x} - 2e^{x} + e^{2x}$$

$$y_3 = 2e^{-x} + 2e^{x} - e^{2x}$$