東京大学大学院工学系研究科　電気工学・電子工学専攻　入試
平成 19 年　物理　第 3 問

(1)

C_1 と R_1 の並列接続の合成インピーダンスは、

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C_1} // R_1 = \left(j\omega C_1 + \frac{1}{R_1} \right)^2$$

であり、C_2、R_2 の直列接続と、R_1 の合成インピーダンスは、

$$Z_2 = \left(\frac{1}{j\omega C_2} + R_2 \right) // R_1 = \left(\frac{1}{\frac{1}{j\omega C_2} + R_2} + \frac{1}{R_1} \right)^2$$

である。

これらの合成インピーダンスで入力信号 e を分圧したものが出力に現れるので、

$$v = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} e$$

これを計算すると、

$$v = \frac{1 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + j\omega(C_1 R_1 + C_2 R_2)}{2 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + j\omega(C_1 R_2 + C_2 R_1 + 2C_2 R_2)} e$$

である。

伝達関数 G は、

$$G = \frac{v}{e} = \frac{1 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + j\omega(C_1 R_1 + C_2 R_2)}{2 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + j\omega(C_1 R_2 + C_2 R_1 + 2C_2 R_2)}$$

(2)

伝達関数の分子は、

$$1 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + j\omega(C_1 R_1 + C_2 R_2) = (1 + j\omega C_1 R_1)(1 + j\omega C_2 R_2)$$

と因数分解できる。

分母の虚部について、

$$C_1 R_2 + C_2 R_1 + 2C_2 R_2 = (2C_1 R_2 + C_2 R_1) + (2C_2 R_2 - C_1 R_2) \fallingdotseq 2C_1 R_2 + C_2 R_1$$

と近似すると、

$$2 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + j\omega(2C_1 R_2 + C_2 R_1) = (2 + j\omega C_2 R_1)(1 + j\omega C_1 R_2)$$

である。

まとめると、伝達関数は、

$$G \fallingdotseq \frac{(1+j\omega C_1 R_1)(1+j\omega C_2 R_2)}{(2+j\omega C_2 R_1)(1+j\omega C_1 R_2)}$$

である。

伝達関数の振幅は、

$$|G| = \frac{|1+j\omega C_1 R_1||1+j\omega C_2 R_2|}{|2+j\omega C_2 R_1||1+j\omega C_1 R_2|} = \sqrt{\frac{(1-\omega^2 C_1^2 R_1^2)(1-\omega^2 C_2^2 R_2^2)}{(4-\omega^2 C_2^2 R_1^2)(1-\omega^2 C_1^2 R_2^2)}}$$

であり、これを折れ線近似を用いてグラフに表せば良い。(グラフ略)

近似

強引すぎる気がする。低域と高域を強調するという目的が果たせていないので、間違っていると思われる。

(3)

$\alpha = 0$ のとき、出力 v' は明らかに 0 である。

$0 < \alpha < 0.5$ のとき、(1) で得られた v を、$2\alpha R_1$ と $(1-2\alpha)R_1$ という抵抗で分圧したものが出力 v' に現れるので、

$$G' = \frac{2\alpha R_1}{R_1} G = 2\alpha G$$

である。

$\alpha = 0.5$ のときについては、(2) で求めた。

$0.5 < \alpha < 1$ のとき、先の計算と同様に、$e - v$ を $2(1-\alpha)R_1$ と $(2\alpha-1)R_1$ なる抵抗で分圧したものが、出力 v' に対して、$e - v'$ として表れるので、

$$G' = (2\alpha - 1) + 2(1-\alpha)G$$

である。

$\alpha = 1$ のとき、v' は明らかに e である。

以上をグラフにまとめれば良い。(グラフ略)

グラフの描き方

グラフを描くときのポイントをまとめる。

- 特徴ある点の値を代入する。(ex.$x = 0$、$x \to \pm\infty$ など)
- 簡単に微分できるなら微分して増減を調べる。
- それができなければ、変数が増加した場合、関数全体して増加するのか減少するのかを調べる。
- 変数が十分に小さい域と、十分に大きい域で近似をしながらグラフを描く。
- 漸近線がないか調べる。