東京大学大学院工学系研究科　電気工学・電子工学専攻　入試
平成 19 年　物理　第 5 問

(1)

円板を r 方向と θ 方向の小片に分割して慣性モーメントを求める。

$$\begin{aligned} I_Z &= \iint \frac{M}{\pi a^2} \cdot dr \cdot r d\theta \cdot r^2 \\ &= \frac{M}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr \\ &= \frac{1}{2} M a^2 \end{aligned}$$

慣性モーメント

z 軸まわりの慣性モーメントは、

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2$$

ここで、m_i は質点の質量、r_i は質点の z 軸までの距離である。

(2)

$$\begin{aligned} I_X &= \iint \frac{M}{\pi a^2} \cdot dr \cdot r d\theta \cdot (r \sin\theta)^2 \\ &= \frac{M}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta \int_0^a r^3 dr \\ &= \frac{1}{4} M a^2 \end{aligned}$$

対称性から、

$$I_Y = I_X = \frac{1}{4} M a^2$$

$$\therefore I_Z = I_X + I_Y$$

薄板の定理

この問いで求めた結果を薄板の定理と呼ぶ。厚さの無視できる板の面内に x 軸と y 軸をとり、垂直に z 軸を取ると、

$$I_z = I_x + I_y$$

(3)

$\mathrm{Z_b}$ 軸は重心を通っているから、求める慣性モーメントは、

$$I(h) = I_Z + Mh^2 = M(\frac{a^2}{2} + h^2)$$

平行軸の定理

この問いでは平行軸の定理と呼ばれる定理を用いている。剛体の全質量を M、重心を通る軸に関する慣性モーメントを I_G とすると、その軸から距離 h だけ平行移動させた z 軸に関する完成モーメントは、

$$I_z = I_G + Mh^2$$

(4)

ばねの力は中心力であるから、円板の角運動量は保存する。

$$I(L_0 + a)\omega_0 = I(L_1 + a)\omega_1$$

$$\left\{M\left(\frac{a^2}{2} + (L_0 + a)^2\right)\right\}\omega_0 = \left\{M\left(\frac{a^2}{2} + (L_1 + a)^2\right)\right\}\omega_1$$

$$\left\{M\left(\frac{a^2}{2} + (3a)^2\right)\right\}\omega_0 = \left\{M\left(\frac{a^2}{2} + (4a)^2\right)\right\}\omega_1$$

$$\therefore \frac{\omega_0}{\omega_1} = \frac{33}{19}$$

(5)

求めるエネルギー E は、回転運動のエネルギーの変化に等しいので、

$$E = \frac{1}{2}I(L_1 + a)\omega^2 - \frac{1}{2}I(L_0 + a)\omega^2 = -\frac{231}{38}Ma^2\omega_1^2$$

(6)

円板の重心は、バネが切れる前の速度のまま運動を続けるので、並進運動の速度 v_1 は、

$$v_1 = (L_1 + a)\omega_1 = 4a\omega_1$$

であり、バネが切れる前の円運動の接線方向に等速直線運動をする。

バネが切れる前の円板の外側の速度 v_{ex} は、

$$v_{ex} = (L_1 + 2a)\omega_1 = 5a\omega_1$$

であり、同様に円板の内側の速度 v_{in} は、

$$v_{in} = L_1\omega_1 = 3a\omega_1$$

である。バネが切れると、この速度差が回転運動を生じるので、円板の重心から見て角速度 ω の回転運動をする。回転の方向は ω_1 の方向と等しい。