東京大学大学院工学系研究科　電気系工学専攻　入試
平成 20 年　数学　第 1 問

(1)

存在しないことを背理法を用いて証明する。x が t によらず定数 C となると仮定する。この時、

$$(\text{左辺}) = \ddot{x} = 0$$

$$(\text{右辺}) = -\frac{\dot{x}^2 - 2}{2x} = \frac{1}{C}$$

左辺と右辺を一致させるような定数 C は存在しないので不合理。よって、x が t によらず一定となる解は存在しない。

(2)

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v$$

合成関数の微分

$y = g(u)$ と $u = f(x)$ に対して、

$$\frac{dg(f(x))}{dx} = \frac{dg(u)}{du)}\Big|_{u=f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx}$$

または、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

逆関数の微分

$x = \phi(y)$ を $y = f(x)$ の逆関数とすると、、

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}$$

または、

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

(3)

微分方程式を変形すると、

$$\frac{dv}{dx} \cdot v = -\frac{v^2-2}{2x}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{v^2-2}{2v}\right)$$

$$\int \frac{dv}{-\frac{v^2-2}{2v}} = \int \frac{1}{x}dx + C$$

$$(\text{左辺}) = -\int \left(\frac{1}{v+\sqrt{2}} + \frac{1}{v-\sqrt{2}}\right)dv = -(\log|v+\sqrt{2}| + \log|v-\sqrt{2}|)$$

$$(\text{右辺}) = \log|x| + C$$

まとめると、

$$\log|x(v^2-2)e^C| = 0$$

$$\therefore x(v^2-2)e^C = \pm 1$$

である。$x(0) = a$ と $\dot{x}(0) = b$ より、

$$e^C = \pm\frac{1}{a(b^2-2)}$$

$$\therefore x(v^2-2) = \pm a(b^2-2)$$

v について書きかけると、

$$v^2 = 2 \pm \frac{a(b^2-2)}{x}$$

$t = 0$ を考えると、復号のマイナスは不適。

$$\therefore v^2 = 2 + \frac{a(b^2-2)}{x}$$

さらに、

$$v = \pm\sqrt{2 + \frac{a(b^2-2)}{x}}$$

ここでも、$t = 0$ を考えると、復号のマイナスは不適である。

$$\therefore \dot{x} = \sqrt{2 + \frac{a(b^2-2)}{x}}$$

別解

初期値を含めて定積分を取る。

$$\int_b^{\dot{x}} \frac{2v}{v^2-1}dv = -\int_a^x \frac{dx}{x}$$

$$\left[\log|v^2-2|\right]_b^{\dot{x}} = -\left[\log|x|\right]_a^x$$

$$\therefore \log\left|\frac{\dot{x}^2-2}{b^2-2}\right| = \log\left|\frac{a}{x}\right|$$

$$\therefore \dot{x} = \sqrt{\frac{a}{x}(b^2-2)+2}$$

絶対値の性質

分数関数の積分を取ると絶対値記号が出てきてしまうので厄介。そこで、絶対値の性質を復習しておく。

$$|\alpha||\beta| = |\alpha\beta|$$

(4)

(3) で得られた式に、$x(0)=1$、$\dot{x}(0)=\sqrt{2}$ を代入する。

$$\dot{x} = \sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2}t + C^{'}$$

ここで、$C^{'}$ は積分定数である。$x(0)=1$ より $C^{'}=1$ であるから、

$$x = \sqrt{2}t + 1$$

(おまけ)

変数分離形

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

1. 左辺に y の項、右辺に x の項をまとめる。
2. 両辺を積分する。

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$$

の形に変形して、両辺の積分をとると、

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$$

1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

定数変化法によって解く。

1. 同次形の微分方程式を解く。
2. 定数 C を $C(x)$ に置き換えて元の微分方程式に代入する。
3. $C(x)$ を求める微分方程式になるので、これを解く。
4. $C(x)$ を代入すると、解が得られる。

$q(x) = 0$ の時を線形同次といい、変数分離形になる。

$$\int \frac{1}{y} dy = -\int p(x)dx$$

$$\therefore \log|y| = -P(x) + c$$

$$\therefore y = Ce^{-P(x)}$$

線形同次の解において、$C = C(x)$ とおいて、元の微分方程式に代入すると、

$$C^{'}(x) = e^{P(x)}q(x)$$

$$\therefore C(x) = \int e^{P(x)}q(x)dx + C$$

$$\therefore y = \left(\int e^{P(x)}q(x)dx + C\right)e^{-P(x)}$$

積分因子によって解く。

1. 微分方程式に積分因子 $e^{\int p(x)dx}$ をかけて変形する。
2. $e^{\int p(x)dx}y$ を求める微分方程式になるので、これを解く。
3. 変形すれば、解が得られる。

微分方程式の両辺に $e^{\int p(x)dx}$ をかけると、

$$e^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int p(x)dx}p(x)y = e^{\int p(x)dx}q(x)$$

$$(\text{左辺}) = \frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx}y\right)$$

$$\therefore e^{\int p(x)dx}y = \int e^{P(x)}q(x)dx + C$$

$$\therefore y = \left(\int e^{P(x)}q(x)dx + C\right)e^{-P(x)}$$

同次形

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

において、$f(kx,ky) = f(x,y)$ の時、これを同次形の微分方程式と呼ぶ。

1. $y(x) = xz(x)$ とおく。
2. 同次の定義より、$f(x,y) = f(1,z)$ となる。
3. これらより、元の微分方程式は変数分離形に帰着する。

$y(x) = xz(x)$ とおくと、

$$\frac{dy}{dx} = z(x) + x\frac{dz}{dx}$$

であり、

$$f(x,y) = f(x,xz) = f(1,z) = g(z)$$

になる。

したがって、元の微分方程式は、

$$z + x\frac{dz}{dx} = g(z)$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{g(z)-z}{x}$$

というように、変数分離形の微分方程式に帰着する。

完全形

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

において、$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) + \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y) = 0$ の時、これを完全形の微分方程式と呼ぶ。

1. $f(x,y) = \int P(x,y)dx + u(y)$ とおく。
2. $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$ となるように、$u(x)$ を定める。
3. 解が $f(x,y) = C$ で与えられる。

$f(x,y) = \int P(x,y)dx + u(y)$ とおくと、

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$$

ここで、$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$ となるように、$u(x)$ を決めると、解は、

$$f(x,y) = C$$

で与えられる。

解の両辺を全微分すると、

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy = 0$$

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

であり、はじめに示した微分方程式の条件を満たすので、これは解である。

ベルヌーイの微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$

1. $z = y^{1-n}$ とおく。
2. 変形すると、z に関する 1 階の線形微分方程式に帰着する。

$z = y^{1-n}$ とおくと、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} z^{\frac{1}{1-n}-1} \frac{dz}{dx}$$

である。これを元の微分方程式に代入すると、

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q$$

という線形微分方程式になる。

リッカチの微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y + q(x)y^2 = R(x)$$

1. 特殊解 y_0 を一つ定める。
2. 特殊解 y_0 を微分方程式に代入。
3. $z = y - y_0$ とおいて、微分方程式に代入。
4. 二つの差をとると、ベルヌーイの微分方程式に帰着する。

一つの特殊解 y_0 が求まったとして、$z = y - y_0$ とおくと、

$$(\frac{dz}{dx} + \frac{dy_0}{dx}) + p(x)(z + y_0) + q(x)(z + y_0)^2 = R(x)$$

y_0 は解であるから、

$$\frac{dy_0}{dx} + p(x)y_0 + q(x)y_0^2 = R(x)$$

これらの差をとると、

$$\frac{dz}{dx} + p(x)z + q(x)(z^2 + 2zy_0) = 0$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} + (p(x) + 2q(x)y_0)z = -q(x)z^2$$

これは、ベルヌーイの微分方程式である。

2 階線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x)$$

2 階線形微分方程式の 2 つの特殊解 $y_1(x)$ と $y_2(x)$ に対して、

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ \frac{dy_1(x)}{dx} & \frac{dy_2(x)}{dx} \end{vmatrix}$$

をロンスキー行列という。

同次形

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$$

の解 y_1 と y_2 のロンスキー行列が $W(x) \neq 0$ であれば、これらの解は基本解と呼ばれる。同次形の 2 階微分方程式の一般解は基本解の線形結合

$$y = Ay_1 + By_2$$

であらわされる。

2 階定数係数微分方程式の同次形

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$$

$$s^2 + as + b = 0$$

を特性方程式と呼び、この判別式 $D = \sqrt{a^2 - 4b}$ によって一般解は異なる。

$D > 0$、すなわち特性方程式が相異 2 実解 α と β を持つとき、

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$$

$D = 0$、すなわち特性方程式が重解 α を持つとき、

$$y = Axe^{\alpha x} + Be^{\alpha x}$$

$D < 0$、すなわち特性方程式が虚数解 $p \pm iq$ を持つとき、

$$y = Ae^{px}\cos qx + Be^{px}\sin qx$$

2 階定数係数線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = R(x)$$

同次形の微分方程式の基本解 y_1 と y_2 を用いて、一般解を

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$$

とおく。

$C_1(x)$ と $C_2(x)$ は、

$$W(x) \begin{vmatrix} \frac{d}{dx}C_1(x) \\ \frac{d}{dx}C_2(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ R(x) \end{vmatrix}$$

から求められる。