東京大学大学院工学系研究科　電気系工学専攻　入試
平成 20 年　数学　第 2 問

(1)

$$\tilde{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

と置くと、

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathrm{A}} \tilde{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= a x_1^2 + e x_2^2 + (d+b) x_1 x_2 + (g+c) x_1 + (h+f) x_2 + i \end{aligned}$$

これと与式の係数を比較することにより、

$$a = 1$$

$$e = 1$$

$$i = \frac{15}{8}$$

$$d + b = -6$$

$$g + c = 2$$

$$h + f = 4$$

したがって、求める行列は任意定数 p、q、r を用いて、

$$\tilde{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 1 & p & q \\ -p-6 & 1 & r \\ -q-2 & -r+4 & \frac{15}{8} \end{bmatrix}$$

以下では、$\tilde{\mathrm{A}}$ が対象行列となるように p、q、r を定める。

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \frac{15}{8} \end{bmatrix}$$

(2)

$\tilde{\mathrm{A}}$ から、2×2 の成分を取り出して、A とおく。すなわち、

$$\tilde{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A}} & 1 \\ & & 2 \\ 1 & 2 & \frac{15}{8} \end{bmatrix}$$

である。

$$\mathbf{x}^T\mathrm{A}\mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2$$

であり、この A を直交行列 P によって対角化し、$\mathbf{x} = \mathrm{P}\mathbf{y}$ と直交変換することで、

$$\mathbf{x}^T\mathrm{A}\mathbf{x} = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2$$

となる。

A を対角化するために、特性方程式

$$\det(\lambda E - \mathrm{A}) = 0$$

を解く。

$$(\lambda+2)(\lambda-4) = 0$$

$$\therefore \lambda = -2, 4$$

固有値 $\lambda = -2$ から、固有ベクトル $[1,1]^T$ が得られる。固有値 $\lambda = 4$ から、固有ベクトル $[1,-1]^T$ が得られる。これらの固有ベクトルを正規化して並べることで、直交行列 P が得られる。

$$\mathrm{P} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

これを用いて、

$$\mathbf{x}^T\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathrm{P}^T\mathrm{A}\mathrm{P}\mathbf{y} = -2y_1^2 + 4y_2^2$$

であるから、

$$\alpha_1 = -2$$

$$\alpha_2 = 4$$

また、$\mathbf{x} = \mathrm{P}\mathbf{y}$ より

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \end{bmatrix}$$

であり、

$$2x_1 + 4x_2 = 3\sqrt{2}y_1 - \sqrt{2}y_2$$

したがって、

$$\beta_1 = 3\sqrt{2}$$

$$\beta_2 = -\sqrt{2}$$

$$\mathrm{P} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \\ \cos\frac{\pi}{4} & -\cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$$

であるから、この直交変換は、直線 $x_2 = (\tan\frac{\pi}{8})x_1$ に関する鏡像である。

実 2 次形式

A が n 次の実対称行列であるとき、

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathrm{A}\mathbf{x}$$

を実 2 次形式という。ここで、$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は 2 次式である。A を対角化する直交行列 P を用いて、

$$\mathbf{x} = \mathrm{P}\mathbf{y}$$

の直交変換を行うと、

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

という形 (標準形) になる。

直交行列

直交行列 P の行列式の値は、±1 のいずれかである。

det$P = +1$ のときは、

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

という形に変形でき、これは幾何学的には原点まわりの角 θ の回転を表す。

det$P = -1$ のときは、

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

という形に変形でき、これは幾何学的には直線 $y = (\tan\frac{\theta}{2})x$ に関する鏡像を表す。

(3)

平方完成によって、

$$-2y_1^2 + 3\sqrt{2}y_1 = -2\Big(y_1 - \frac{3}{4}\sqrt{2}\Big)^2 + \frac{9}{4}$$

$$4y_2^2 - \sqrt{2}y_2 = 4\Big(y_2 - \frac{\sqrt{2}}{8}\Big)^2 - \frac{1}{8}$$

であるから、式 (ii) は、

$$-2\Big(y_1 - \frac{3}{4}\sqrt{2}\Big)^2 + 4\Big(y_2 - \frac{\sqrt{2}}{8}\Big)^2 + \frac{9}{4} - \frac{1}{8} + \frac{15}{8} = 0$$

と変形できる。

したがって、

$$z_1 = y_1 - \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

$$z_2 = y_2 - \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$c = \frac{9}{4} - \frac{1}{8} + \frac{15}{8} = 4$$

である。また、この変換は、y_1 方向へ $\frac{3}{4}\sqrt{2}$、y_2 方向へ $\frac{\sqrt{2}}{8}$ の平行移動である。

(4)

$$\alpha_1 z_1^2 + \alpha_2 z_2^2 + c = \tilde{\mathbf{z}}^T \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}}$$

であるから、

$$\tilde{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(2) より、

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathrm{P} & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}$$

(3) より、

$$\tilde{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}}$$

したがって、

$$\tilde{\mathrm{Q}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{7}{8} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(5)

(iii) を変形すると、

$$\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{z_2}{1}\right)^2 = 1$$

であり、これは z_1-z_2 平面における双曲線である。(i) で表わされる二次曲線は、(3) で得られた変換の逆によってこの双曲線を平行移動し、(2) で得られた変換の逆によって鏡像をとったものである。(グラフ略)

二次曲線

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

は座標平面上で楕円を表す。x 軸方向の径が a で、y 軸方向の径が b である。

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

は座標平面上で双曲線を表す。x 軸との交点が $\pm a$ で、漸近線が $y = \pm \frac{b}{a} x$ である。