東京大学大学院工学系研究科　電気系工学専攻　入試
平成 20 年　物理・情報　第 1 問

(1)

運動量保存則より、

$$mv_1 + M \cdot 0 = m(-v_2) + Mv_G$$

$$\therefore v_G = \frac{m}{M}(v_1 + v_2)$$

剛体の運動方程式

物体の運動を記述するために必要な変数の数を自由度という。たとえば、1 次元の質点の運動なら、自由度は 1。3 次元の剛体の運動は、重心の位置と、重心まわりの回転が決まれば完全に決まる。したがって、自由度は 6。運動方程式は未知数を 6 個含む。

重心の運動方程式は、

$$M\ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{F}$$

重心まわりの回転の運動方程式は、

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}$$

である。

この問題では、重心の運動が自由度 1 で、回転の運動が自由度 1 であるから、運動方程式を 2 本立てる。前者を (1) で、後者を (2) で求める。

質点系

3 次元空間に 100 個の質点があるとする。このような系を質点系という。質点 1 つにつき 3 の自由度であるから、この系を記述するには全部で 300 の運動方程式を解く必要がある。

ここに、剛体であるという条件を加えると、上に述べたように自由度は 6 になる。したがって、6 つの運動方程式を解くだけで、この系を記述できる。

(2)

角運動量保存則より、

$$(\frac{l}{2} - d_1)mv_1 = (\frac{l}{2} - d_1)(-mv_2) + I_G\omega$$

である。ここで、I_G は棒の重心周りの慣性モーメントであり、

$$I_G = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{M}{l} x^2 dx = \frac{1}{12} M l^2$$

である。

$$\therefore \omega = \frac{6m(l-2d_1)}{Ml^2}(v_1+v_2)$$

並進運動と回転運動の関係

まず、並進運動と回転運動の物理量の対応を確認する。

- 質量 $m \longrightarrow$ 慣性モーメント I
- 速度 $v \longrightarrow$ 角速度 ω
- 運動量 $p \longrightarrow$ 角運動量 L
- 力 $F \longrightarrow$ 力のモーメント N

これから以下の式も類推できる。

- $F = \frac{dp}{dt} \longrightarrow N = \frac{dL}{dt}$
- $p = mv \longrightarrow L = I\omega$
- $E = \frac{1}{2}mv^2 \longrightarrow E^{'} = \frac{1}{2}I\omega^2$

(3)

並進運動と回転運動の速度が打ち消しあう点で棒は動かない。求める距離を d とすると、

$$v_G = (d - \frac{l}{2})\omega$$

$$\frac{m}{M}(v_1+v_2) = (d-\frac{l}{2}) \cdot \frac{12m(\frac{l}{2}-d_1)}{Ml^2}(v_1+v_2)$$

$$\therefore d = \frac{2l-3d_1}{3l-6d_1} l$$

撃力の中心

剛体に撃力を加えたとき、その瞬間には静止したままの点が存在する。これを撃力の中心と呼ぶ。

重心から、撃力の方向と垂直になるように x 軸を取る。この時、撃力の中心は x 軸上にあり、重心からの距離は $\frac{I}{hM}$ である。ここで、I は重心からみた慣性モーメント、h は撃力の加わる位置、M は剛体の質量である。

これを本問に適用すると、

$$I = \frac{1}{12} M l^2$$

$$h = \frac{l}{2} - d_1$$

$$\therefore d = \frac{l}{2} + \frac{\frac{1}{12}Ml^2}{\left(\frac{l}{2} - d_1\right)M} = \frac{2l - 3d_1}{3l - 6d_1}l$$

撃力

ごく短い時間に働く大きな力のことを撃力という。撃力 F に対しては、

$$\bar{F} = \int_t^{t+\Delta t} F dt$$

で定義される力積が、Δt が小さくても有限である。

(4)

(5)

(6)

棒の点 A の周りの慣性モーメントは、

$$I_A = \int_0^l \frac{M}{l} x^2 dx = \frac{1}{3} Ml^2$$

である。求める角速度 ω を用いて、回転の運動方程式を立てると、

$$\frac{d}{dt}(I_A \omega) = \tilde{F} d_2$$

と書ける。ここで、$\tilde{F}$ は、撃力の力で $F = \int \tilde{F} dt$ である。

$$\int d\omega = \frac{3d_2}{Ml^2} \int \tilde{F} dt$$

$$\therefore \omega = \frac{3Fd_2}{Ml^2}$$

慣性モーメントの導出の別解

重心に対して求めた慣性モーメントを利用しても I_A を求められる。

$$I_A = I_G + M(\frac{l}{2})^2 = \frac{1}{3} Ml^2$$