東京大学大学院工学系研究科　電気系工学専攻　入試
平成20年　物理・情報　第5問

(1)

素子のインピーダンスは

$$Z = R_x + \frac{1}{j\omega C_x}$$

である。電圧源の複素表示を $\dot{E}$ とすると、

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{\dot{E}}{R_x + \frac{1}{j\omega C_x}} = \frac{\omega^2 C_x^2 R_x + j\omega C_x}{\omega^2 C_x^2 R_x^2 + 1}\dot{E}$$

素子を流れる正弦波電流の波高値は、

$$|I| = |\dot{I}| = \frac{\sqrt{\omega^4 C_x^4 R_x^2 + \omega^2 C_x^2}}{\omega^2 C_x^2 R_x^2 + 1}|E| = \frac{\omega C_x}{\sqrt{\omega^2 C_x^2 R_x^2 + 1}}|E|$$

であり、位相 φ は、

$$\varphi = \arg \dot{I} = \tan^{-1}\left(\frac{\omega C_x}{\omega^2 C_x^2 R_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega C_x R_x}\right)$$

である。

複素数の性質を利用した解法

複素数の絶対値と偏角の性質をうまく利用すれば計算量を減らせる。

$$\dot{Z} = R_x + \frac{1}{j\omega C_x} = R_x - j\frac{1}{\omega C_x}$$

$$|I| = \left|\frac{\dot{E}}{\dot{Z}}\right| = \frac{|\dot{E}|}{|\dot{Z}|} = \frac{|E|}{\sqrt{R_x^2 + \frac{1}{\omega^2 C_x^2}}} = \frac{\omega C_x}{\sqrt{\omega^2 C_x^2 R_x^2 + 1}}|E|$$

$$\varphi = \arg \dot{I} = \arg \dot{E} - \arg \dot{Z} = -\tan^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{\omega C_x}}{R_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega C_x R_c}\right)$$

フェーザ法

1. 電流、電圧を複素表示にする。

2. 回路素子をインピーダンス表示する。
3. 直流と同様に電流を求める。
4. 電流の複素数の絶対値が電流の振幅
5. 電流の複素数の偏角が電流の位相

複素数の絶対値

$$|\alpha + i\beta| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

ルートを忘れないように注意。

$$\arg(\alpha + i\beta) = \tan^{-1}(\frac{\beta}{\alpha})$$

複素数の性質

複素数 z_1、z_2 に対して、

$$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg z_1 - \arg z_2$$

用いると便利。

(2)

シェーリングブリッジの左上部分を流れる電流を I_1、右上部分を流れる電流を I_x、左下部分を流れる電流を I_2、右下部分を流れる電流を I_3 とする。シェーリングブリッジの上下端にかかる電圧が $\dot{E}$ であるから、

$$\frac{1}{j\omega C_1}\dot{I}_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C_2}\dot{I}_2 = \dot{E}$$

$$(\frac{1}{j\omega C_x} + R_x)\dot{I}_x + R_3\dot{I}_3 = \dot{E}$$

であり、また検流計 D には電流が流れないから、

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2$$

$$\dot{I}_x = \dot{I}_3$$

である。また、シェーリングブリッジの左右の端子の電位は等しいから、

$$\frac{1}{j\omega C_1}\dot{I}_1 = (\frac{1}{j\omega C_x} + R_x)\dot{I}_x$$

である。以上の 5 式から、I_1、I_x、I_2、I_3、E を消去すると、平衡条件式が得られる。

$$j\omega C_1(\frac{1}{j\omega C_x} + R_x) = R_3(\frac{1}{R_2} + j\omega C_2)$$

実部と虚部を比較すると、

$$C_x R_3 = C_1 R_2$$

$$C_2 R_3 = C_1 R_x$$

検流計

内部抵抗は理想的には 0。そのため、端子間に電位差が生じると無限の電流が流れる。したがって、電位差は 0 でなければならない。

ブリッジ回路の平衡条件式

$$Z_{左上} \times Z_{右下} = Z_{右上} \times Z_{左下}$$

斜めの組み合わせの積が等しい時、検流計に電流が流れない。

(3)

検流計を流れる電流を I_D とする。シェーリングブリッジの上下端にかかる電圧が $\dot{E}$ であるから、

$$\frac{1}{j\omega C}\dot{I}_1 + R\dot{I}_2 = \dot{E}$$

$$\frac{1}{j\omega 2C}\dot{I}_x + R\dot{I}_3 = \dot{E}$$

である。キルヒホッフの電流則より、

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_D + \dot{I}_2$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_D + \dot{I}_x$$

である。またシェーリングブリッジの左右の端子の電位は等しいから、

$$R\dot{I}_2 = R\dot{I}_3$$

である。以上の 5 式から、I_1、I_x、I_2、I_3 を消去すると、

$$\dot{I}_D = -\frac{j\omega C}{2 + j3\omega CR}\dot{E}$$

である。したがって、検流計を流れる正弦波電流の波高値は、

$$|\dot{I}_D| = \frac{\omega C|E|}{\sqrt{4 + 9\omega^2 C^2 R^2}}$$

であり、位相 φ_D は、

$$\varphi_D = \arg\dot{I}_D = \tan^{-1}\bigl(-\frac{2}{3\omega CR}\bigr)$$

である。

(おまけ)

電力

　平均電力 (有効電力) は、

$$P_a = \frac{V_m I_m}{2} \cos\varphi$$

V_m は電圧の振幅、I_m は電流の振幅、φ は位相差、$\cos\varphi$ は力率と呼ばれる。複素表示を用いて、

$$P_a = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{V}_m \bar{\dot{I}}_m)$$

と書くこともできる。
　無効電力は、

$$P_r = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\dot{V}_m \bar{\dot{I}}_m)$$

であり、皮相電力は、

$$|P| = \frac{1}{2}|\dot{V}_m \bar{\dot{I}}_m|$$