東京大学大学院工学系研究科　電気工学・電子工学専攻　入試
平成 17 年　数学　第 1 問

(1)

$m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=0$ の特性方程式 $ms^2+\beta s+k=0$ を解くと、

$$s=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4km}}{2m}$$

特性方程式の判別式 $D=\beta^2-4km$ の正負によって、微分方程式の解は異なり、

$$x=\begin{cases} A\exp\left(\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4km}}{2m}t\right)+B\exp\left(\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4km}}{2m}t\right) & ;D>0 \\ A\exp\left(\frac{-\beta}{2m}t\right)+Bt\exp\left(\frac{-\beta}{2m}t\right) & ;D=0 \\ \exp\left(\frac{-\beta}{2m}t\right)\left\{A\cos\left(\frac{\sqrt{4km-\beta^2}}{2m}t\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{4km-\beta^2}}{2m}t\right)\right\} & ;D<0 \end{cases}$$

ここで、A と B は積分定数で、初期条件によって決定される。

$$x=\begin{cases} \frac{mv_0}{\sqrt{\beta^2-4km}}\left\{\exp\left(\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4km}}{2m}t\right)-\exp\left(\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4km}}{2m}t\right)\right\} & ;D>0 \\ v_0t\exp\left(\frac{-\beta}{2m}t\right) & ;D=0 \\ \frac{2mv_0}{\sqrt{4km-\beta^2}}\exp\left(\frac{-\beta}{2m}t\right)\sin\left(\frac{\sqrt{4km-\beta^2}}{2m}t\right) & ;D<0 \end{cases}$$

(2)

解が振動解であるのは、$D<0$ の場合である。

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2mv_0}{\sqrt{4km-\beta^2}}\left\{-\frac{\beta}{2m}e^{-\frac{\beta}{2m}t}\sin\frac{\sqrt{4km-\beta^2}}{2m}t+\frac{\sqrt{4km-\beta^2}}{2m}e^{-\frac{\beta}{2m}t}\cos\frac{\sqrt{4km-\beta^2}}{2m}t\right\}=0$$

$$\therefore\tan\frac{\sqrt{4km-\beta^2}}{2m}t=\frac{\sqrt{4km-\beta^2}}{\beta}$$

したがって、初めて速度がゼロになる時刻は、

$$t=\frac{2m}{\sqrt{4km-\beta^2}}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{\sqrt{4km-\beta^2}}{\beta}$$

ここで、Tan^{-1} は $\tan^{-1}$ のうち、0 以上で π 未満のものを表す。

(3)

$m=1, \beta=6, k=34, a_0=0$ とした場合の解は、$D<0$ であるから (1) より、

$$x=\frac{2mv_0}{\sqrt{4km-\beta^2}}\exp\Big(\frac{-\beta}{2m}t\Big)\sin\Big(\frac{\sqrt{4km-\beta^2}}{2m}t\Big)$$

初期条件より $v_0=0$ であるから、求める微分方程式の同次形の特殊解は、

$$x=0$$

次に、非同次形、

$$\frac{d^2x}{dt^2}+6\frac{dx}{dt}+34x=170\sin 2t$$

の特解を求めるために、$x=\alpha\cos 2t+\beta\sin 2t$ とおいて、これを代入する。

$$(-4\alpha+12\beta+34\alpha)\cos 2t+(-4\beta-12\alpha+34\beta)\sin 2t=170\sin 2t$$

三角関数の係数の比較により、

$$-4\alpha+12\beta+34\alpha=0$$

$$-4\beta-12\alpha+34\beta=170$$

これを解いて、

$$\alpha=-\frac{170}{87}, \beta=\frac{425}{87}$$

以上より、非同次形の特解は、

$$x=-\frac{170}{87}\cos 2t+\frac{425}{87}\sin 2t$$

同次形の一般解と、非同次形の特解から、求める解を得られる。

$$x=-\frac{170}{87}\cos 2t+\frac{425}{87}\sin 2t$$

東京大学大学院工学系研究科　電気工学・電子工学専攻　入試
平成17年　数学　第2問

(1)

特性方程式は、

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^3 - (a+b+c)\lambda^2 + (ab+bc+ca-2a^2-b^2)\lambda - a(a-b)(b-c)$$

したがって、解と係数の関係より、

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a+b+c$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = a(a-b)(b-c)$$

解と係数の関係

2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解を p と q とすると、

$$x^2+ax+b = (x-p)(x-q) = x^2+(p+q)x+pq$$

すなわち、

$$a = p+q$$

$$b = pq$$

という関係が成立する。一般の n 次方程式の場合も同様に、n-1 次の係数には解の和が、定数項には解の積が生じる。

別解

A を対角化しトレースをとると、

$$\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

トレースは交換法則が成立するので、

$$\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(P^{-1}PA) = \mathrm{Tr}A = a+b+c$$

$$\therefore \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a+b+c$$

A を対角化し行列式を求めると、

$$\det(P^{-1}AP) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$$

$$\det(P^{-1}AP) = \det P^{-1} \det A \det P = \det A = a(b-c)(a-b)$$

$$\therefore \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = a(a-b)(b-c)$$

(2)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} b(c-b) & a(b-c) & 0 \\ a(b-c) & a(c-a) & a(a-b) \\ 0 & a(a-b) & a(b-a) \end{bmatrix}$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{a(a-b)(b-c)}$$

(3)

直交行列の性質により、

$$\det(P) = \det(P^T)$$

$$PP^T = I$$

したがって、

$$\det(PP^T) = \det(P)\det(P^T) = \{\det(P)\}^2 = \det(I) = 1$$

$$\therefore |\det(P)| = 1$$

(4)

対角行列の逆行列は、

$$(P^TAP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}(P^T)^{-1} = P^TA^{-1}P$$

したがって、

$$\begin{aligned} x^TA^{-1}x =& (Py)^TA^{-1}(Py) \\ =& y^TP^TA^{-1}Py \\ =& y^T(P^TAP)^{-1}y \\ =& \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ =& \frac{y_1^2}{\lambda_1} + \frac{y_2^2}{\lambda_2} + \frac{y_3^2}{\lambda_3} \end{aligned}$$

(5)

積分変数を変換するためにヤコビ行列式 $|J|$ を計算する。

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = |P| = 1$$

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^T A^{-1} x) dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(\frac{y_1^2}{\lambda_1} + \frac{y_2^2}{\lambda_2} + \frac{y_3^2}{\lambda_3})|J| dy_1 dy_2 dy_3 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z_1^2)\exp(-z_2^2)\exp(-z_3^2)\sqrt{\lambda_1}dz_1\sqrt{\lambda_2}dz_2\sqrt{\lambda_3}dz_3 \\
&= \sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-z_1^2)dz_1\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-z_2^2)dz_2\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-z_3^2)dz_3 \\
&= \sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\pi^3}
\end{aligned}$$

東京大学大学院工学系研究科　電気工学・電子工学専攻　入試
平成17年　物理　第3問

(1)

i_3 はインダクタにより、スイッチ S_1 を閉じた瞬間には変化しないので、

$$i_3(0) = 0$$

オームの法則により、

$$i_1(0) = i_2(0) = \frac{10\mathrm{V}}{5\Omega + 2\Omega + 3\Omega} = 1\mathrm{A}$$

(2)

回路方程式は、

$$10\mathrm{V} = 5\mathrm{H} \times \frac{di_3}{dt} + (2\Omega + 3\Omega) \times i_1$$

$$10\mathrm{V} = 5\Omega \times i_2 + (2\Omega + 3\Omega) \times i_1$$

$$i_1 = i_2 + i_3$$

以上の3式から i_1 と i_2 を消去すると、

$$2\frac{di_3}{dt} + i_3 = 2$$

この微分方程式を解けば、i_3 が得られる。

(右辺) $= 0$ とした同次形の一般解は、特性方程式 $2s + 1 = 0$ より、

$$s = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore i_3 = ke^{-\frac{t}{2}}$$

ここで、k は任意定数である。

次に非同次形の微分方程式の特解を $i_3 = A$ と仮定して、これを微分方程式に代入すると、

$$A = 2$$

$$\therefore i_3 = 2$$

同次形の一般解と非同次形の特解の和が、求める微分方程式の一般解で、

$$i_3 = ke^{-\frac{t}{2}} + 2$$

初期値 $i_3(0) = 0$ より、$k = -2$ が得られ、

$$i_3 = 2(1 - e^{-\frac{t}{2}})$$

先の連立微分方程式から i_1 を消去すると、

$$i_2 = \frac{di_3}{dt}$$

$$\therefore i_2 = e^{-\frac{t}{2}}$$

また、

$$i_1 = i_2 + i_3 = 2 - e^{-\frac{t}{2}}$$

(グラフ略)

別解

ラプラス変換を用いた別解を記す。

回路方程式をラプラス変換すると、

$$\frac{10}{s} = 5\Big(sI_3 - i_3(0)\Big) + 5I_1$$

$$\frac{10}{s} = 5I_2 + 5I_1$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

ここで、I_1、I_2、I_3 は、それぞれ i_1、i_2、i_3 のラプラス変換である。

これを解くと、

$$I_1 = 2\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{2}}$$

$$I_2 = \frac{1}{s + \frac{1}{2}}$$

$$I_3 = 2\frac{1}{s} - 2\frac{1}{s + \frac{1}{2}}$$

が得られる。

それぞれをラプラス逆変換することで、上と同様の解が得られる。

(3)

スイッチ S_2 を閉じる直前の電流の値は、

$$i_1(t_1-0)=\lim_{t\to\infty}(2-e^{-\frac{t}{2}})=2\mathrm{A}$$

$$i_2(t_1-0)=\lim_{t\to\infty}(e^{-\frac{t}{2}})=0\mathrm{A}$$

$$i_3(t_1-0)=\lim_{t\to\infty}\{2(1-e^{-\frac{t}{2}})\}=2\mathrm{A}$$

i_3 はインダクタにより、スイッチ S_2 を閉じた瞬間には変化しないので、

$$i_3(t_1)=2\mathrm{A}$$

キルヒホッフの法則により、

$$i_1=i_2+i_3=i_2+2\mathrm{A}$$

$$10\mathrm{V}=5\Omega\times i_2+2\Omega\times i_1$$

これを解いて、

$$i_1(t_1)=\frac{20}{7}\mathrm{A}$$

$$i_2(t_2)=\frac{6}{7}\mathrm{A}$$

(4)

回路方程式は、

$$10\mathrm{V}=5\Omega\times i_2+2\Omega\times i_1$$

$$10\mathrm{V}=5\mathrm{H}\times\frac{di_3}{dt}+2\Omega\times i_1$$

$$i_1=i_2+i_3$$

であり、これを (3) の初期条件の下で解けば求める解が得られる。

(2) と同様に微分方程式を解くと、

$$i_1=-\frac{15}{7}e^{-\frac{2}{7}(t-t_1)}+5$$

$$i_2=\frac{6}{7}e^{-\frac{2}{7}(t-t_1)}$$

$$i_3=-3e^{-\frac{2}{7}(t-t_1)}+5$$

(グラフ略)

別解

ラプラス変換を用いた別解を記す。

回路方程式をラプラス変換すると、

$$\frac{10}{s} = 5I_2 + 2I_1$$

$$\frac{10}{s} = 5\Big(sI_3 - i_3(t_1)\Big)+2I_1$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

これを解くと、

$$I_1 = 5\frac{1}{s} - \frac{15}{7}\frac{1}{s+\frac{2}{7}}$$

$$I_2 = -\frac{6}{7}\frac{1}{s+\frac{2}{7}}$$

$$I_3 = 5\frac{1}{s} - 3\frac{1}{s+\frac{2}{7}}$$

が得られる。

それぞれをラプラス逆変換することで、上と同様の解が得られる。

東京大学大学院工学系研究科　電気工学・電子工学専攻　入試
平成 17 年　物理　第 4 問

(1)

$v = v_i$、$i = gv = gv_i$ であるから、

$$v_o = R(-i) = -Rgv_i$$

ソース接地回路

典型的なソース接地回路と見れば良い。

(2)

$$i = gv$$

$$v_i = v + R_C i$$

より、v を消去すると、

$$i = \frac{gv_i}{1 + R_C g}$$

$$\therefore v_o = R(-i) = -\frac{Rg}{1 + R_C g} v_i$$

(3)

(3-1)

i_1 と i_2 は枝分かれせずに流れているので、

$$i_1 + i_2 = 0$$

(3-2)

仮想デバイスを流れる電流はそれぞれ、

$$i_1 = g(v_{i1} - v_x)$$

$$i_2 = g(v_{i2} - v_x)$$

この式と、(3-1) の電流の関係より、

$$v_x = \frac{1}{2}(v_{i1} + v_{i2})$$

(3-3)

(3-2) より、

$$i_1 = \frac{1}{2}g(v_{i1} - v_{i2})$$

$$i_2 = \frac{1}{2}g(v_{i2} - v_{i1})$$

したがって、

$$v_{o1} = R(-i_1) = -\frac{1}{2}Rg(v_{i1} - v_{i2})$$

$$v_{o2} = R(-i_2) = -\frac{1}{2}Rg(v_{i2} - v_{i1})$$

(3-4)

全差動増幅回路として利用できる。入力信号を $v_i = v_{i1} - v_{i2}$ とし、出力信号を $v_o = v_{o1} - v_{o2}$ とすると、(3-3) の結果を利用して、

$$v_o = -Rgv_i$$

となる。これは (1) で得られた式と同じであるが、差動信号を利用することで同相ノイズを除去できる利点がある。

東京大学大学院工学系研究科　電気工学・電子工学専攻　入試
平成 17 年　物理　第 5 問

(1)

$$J_G = \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{M}{L} \cdot x^2 dx = \frac{1}{12} M L^2$$

(2)

$$J_O = J_G + M\left(\frac{L}{2} - \lambda L\right)^2 = \left(\frac{1}{3} - \lambda + \lambda^2\right) M L^2$$

(3)

運動方程式は、

$$\begin{aligned} J_O \frac{d^2\theta}{dt^2} &= - Mg \sin\theta \left(\frac{L}{2} - \lambda L\right) \\ &\fallingdotseq - Mg \left(\frac{L}{2} - \lambda L\right)\theta \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3(1-2\lambda)}{2(1-3\lambda+3\lambda^2)} \cdot \frac{g}{L} \cdot \theta$$

$$\therefore T = 2\pi \sqrt{\frac{2(1-3\lambda+3\lambda^2)}{3(1-2\lambda)} \cdot \frac{L}{g}}$$

(4)

点 E' を原点にとり、重力の方向を正として x 軸を設定する。物体の対称性から、重心は x 軸上に存在する。求める重心の位置は、

$$x_G = \frac{\frac{L}{2} \cdot M + L \cdot m}{M + m} = \frac{2m + M}{2m + 2M} \cdot L$$

(5)

円盤が回転できることから、円盤を質点とみなして棒の慣性モーメントを求めることができる。

$$J_O^{'} = \int_0^L \frac{M}{L} \cdot x^2 dx + L^2 m = \Big(\frac{1}{3}M + m\Big)L^2$$

この場合の運動方程式は、

$$J_O^{'} \frac{d^2\theta}{dt^2} = -(M+m)g\sin\theta \cdot x_G$$

$$\therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-\frac{2m+M}{2} \cdot g}{(\frac{1}{3}M+m)L}$$

したがって、求める周期は、

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2(M+3m)}{3(M+2m)} \cdot \frac{L}{g}}$$

(6)

円盤が固定されている場合は、棒と円盤をまとめて一つの剛体として、慣性モーメントを求める。棒の部分については、(2) において、$\lambda = 0$ とおくことで、

$$J_O|_{\lambda=0} = \frac{1}{3}ML^2$$

また、円盤の部分については、

$$J_D = mL^2 + \iint \frac{m}{\pi R^2} dr \cdot rd\theta \cdot r^2 = mL^2 + \frac{1}{2}mR^2$$

これらを合わせた物体の慣性モーメントは、

$$J = J_O|_{\lambda=0} + J_D = \frac{1}{3}ML^2 + mL^2 + \frac{1}{2}mR^2$$

(3)、(5) と同様に運動方程式を立てることで周期 T_2 を求めることができる。

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{2ML^2 + 6mL^2 + 3mR^2}{3(2m+M)gL}}$$

和の定理

部分系ごとにとった慣性モーメント $I_z^{(k)}$ の和が全体の慣性モーメント I_z になる。

$$I_z = \sum_k I_z^{(k)}$$

ただし、全ての慣性モーメントは z 軸に対して求める。

東京大学大学院新領域創成科学研究科　基盤情報学専攻　入試
平成 17 年　専門科目　第 5 問

(1)

0 の後には、$\frac{7}{8}$ の確率で 0 が続き、$\frac{1}{7}$ の確率で 1 が続く。また、1 の後には、$\frac{1}{2}$ の確率で 0 が続き、$\frac{1}{2}$ の確率で 1 が続く。したがって、0 の出現する確率 $p(0)$ と、1 の出現する確率 $p(1)$ は、以下のように表わせる。

$$p(0) = p(0)p(0|0) + p(1)p(0|1)$$

$$p(1) = p(0)p(1|0) + p(1)p(1|1)$$

ここで、$p(0|0)$、0 の次に 0 が続くという遷移確率であり、他も同様である。

遷移確率に値を代入すると、

$$p(0) = \frac{7}{8}p(0) + \frac{1}{2}p(1)$$

$$p(1) = \frac{1}{8}p(0) + \frac{1}{2}p(1)$$

であり、これは、$p(0)$ と $p(1)$ についての連立方程式である。これを解くことで、求める確率が得られる。

$$p(0) = \frac{4}{5}$$

$$p(1) = \frac{1}{5}$$

(2)

0 の時のエントロピー H_0 は、

$$H_0 = -\frac{7}{8}\log_2\frac{7}{8} - \frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8}$$

1 の時のエントロピー H_1 は、

$$H_1 = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}$$

である。

情報源のエントロピー H は、

$$H = p(0)H_0 + p(1)H_1 = 0.633$$

対数

　自然対数は、

$$\ln x = \log_e x$$

常用対数は、

$$\log x = \log_{10} x$$

情報理論で用いる対数は、底を 2 とした対数であり、

$$\log_2 x$$

である。自然対数でも常用対数でもない対数というのは普段あまり使わないので、注意する。
　たとえば、

$$\log_{10} 2 = 0.3010$$

などは良く知られているので使ってしまいそうになるが、情報理論では、

$$\log_2 2 = 1$$

である。

(3)

　各シンボルを 0 と 1 で表現し直すと、

- $(0,1) \longrightarrow 1$
- $(1,1) \longrightarrow 01$
- $(2,1) \longrightarrow 001$
- $(3,1) \longrightarrow 0001$
- $(3,0) \longrightarrow 0000$

　それぞれの出現確率は、遷移確率と (1) で求めた確率から求めることができる。

$$p(0,1) = p(1) = \frac{1}{5}$$

$$p(1,1) = p(0) \cdot p(1|0) = \frac{1}{10}$$

$$p(2,1) = p(0) \cdot p(0|0) \cdot p(1|0) = \frac{7}{80}$$

$$p(3,1) = p(0) \cdot p(0|0)^2 \cdot p(1|0) = \frac{49}{640}$$

$$p(3,0) = p(0) \cdot p(0|0)^3 = \frac{343}{640}$$

(4)

ハフマンの符号化法を用いて符号化すると、

- $(0, 1) \longrightarrow 00$
- $(1, 1) \longrightarrow 010$
- $(2, 1) \longrightarrow 0110$
- $(3, 1) \longrightarrow 0111$
- $(3, 0) \longrightarrow 1$

(5)

1 シンボルあたりの符号長、すなわち平均符号長は、

$$2p(0, 1) + 3p(1, 1) + 4p(2, 1) + 4p(3, 1) + 1p(3, 0) \fallingdotseq 1.892$$

である。

平均符号長とエントロピーの関係

エントロピーとの比較？分かりません。

東京大学大学院新領域創成科学研究科　基盤情報学専攻　入試 平成17年　専門科目　第7問

(1)

出力が安定し $V_{OUT} = \frac{V_{DD}}{20}$ となったときを考えると、

$$V_{GS} = V_{IN} = V_{DD}$$

$$V_{DS} = V_{OUT} = \frac{V_{DD}}{20}$$

である。

$$V_{GS} - V_T = V_{DD} - \frac{V_{DD}}{10} = \frac{9}{10}V_{DD}$$

であるから、N1は線形領域で動作している。したがって、そのドレイン電流は $I_D = \beta_1(V_{GS} - V_T)V_{DS}$ であり、

$$V_{OUT} = V_{DD} - RI_D = V_{DD} - R\beta_1(V_{GS} - V_T)V_{DS}$$

$$\therefore R = \frac{190}{9\beta_1 V_{DD}}$$

(2)

N2について、G端子とD端子が接続されているので、

$$V_{DS} = V_{GS}$$

である。したがって、

$$V_{DS} \geq V_{GS} - V_T$$

であり、飽和領域で動作する。

N1は先ほどと同様に、出力が $V_{OUT} = \frac{V_{DD}}{20}$ となったときは、線形領域で動作する。N1のドレイン電流 $I_{D1} = \beta_1(V_{GS1} - V_T)V_{DS1}$ と、N2のドレイン電流 $I_{D2} = \frac{1}{2}\beta_2(V_{GS2} - V_T)^2$ は等しいので、

$$\beta_1(V_{GS1} - V_T)V_{DS1} = \frac{1}{2}\beta_2(V_{GS2} - V_T)^2$$

$$\therefore \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{289}{36}$$

(3)

時刻 $t=0$ 以前では、出力は $V_{OUT}=\frac{V_{DD}}{20}$ に保たれている。この状態で、入力が $V_{IN}=0$ に切り替わると、N1 について

$$V_{GS}=V_{IN}=0$$

$$V_{DS}=V_{OUT}=\frac{V_{DD}}{20}$$

したがって、$V_{DS}\geq V_{GS}-V_T$ で、N1 は飽和領域で動作する。また、出力が上昇しても $V_{DS}\geq V_{GS}-V_T$ の関係は成立するので飽和領域で動作し続ける。

容量に流れ込む電流 I_{OUT} は、2 つのトランジスタの電流の差であり、

$$I_{OUT}=\frac{1}{2}\beta_2(V_{GS2}-V_T)^2-\frac{1}{2}\beta_1(V_{GS1}-V_T)^2$$

である。ここで、

$$V_{GS2}=V_{DD}-V_{OUT}$$

$$V_{GS1}=0$$

である。

容量に電流が流れ込まなくなり、出力が安定するとき、

$$0=\frac{1}{2}\beta_2\Big((V_{DD}-V_{OUT})-V_T\Big)^2-\frac{1}{2}\beta_1(-V_T)^2$$

$$V_{OUT}=V_{DD}-V_T-\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}V_T$$

右辺第 3 項を十分に小さいとすると、

$$V_{OUT}\fallingdotseq V_{DD}-V_T$$

である。

無視できないですよ

十分に小さくないですよ。

(4)

N1 について、V_{IN} が 0 になると、$V_{GS1}\leq V_T$ より $I_{D1}=0$ となる。したがって、飽和領域の N2 のみによって、出力容量が充電される様子を考える。

容量に I_{D2} の電流が流れ込むと、その電圧との関係は、

$$I_{D2}=C\frac{d}{dt}V_{OUT}$$

である。$I_{D2} = \frac{1}{2}\beta_2\Big((V_{DD} - V_{OUT}) - V_T\Big)^2$ であるから、

$$\frac{1}{2}\beta_2\Big((V_{DD} - V_{OUT}) - V_T\Big)^2 = C\frac{d}{dt}V_{OUT}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\beta_2\Big(V_{OUT} - \frac{9}{10}V_{DD}\Big)^2 = C\frac{d}{dt}V_{OUT}$$

という V_{OUT} に関する微分方程式が得られる。

$$\int \frac{dV_{OUT}}{\Big(V_{OUT} - \frac{9}{10}V_{DD}\Big)^2} = \frac{\beta_2}{2C}\int dt + const.$$

と変形して積分を計算すると、

$$\int \frac{dV_{OUT}}{\Big(V_{OUT} - \frac{9}{10}V_{DD}\Big)^2} = -\frac{1}{V_{OUT} - \frac{9}{10}V_{DD}}$$

$$\int dt = t$$

より、

$$-\frac{1}{V_{OUT} - \frac{9}{10}V_{DD}} = \frac{\beta_2}{2C}t + const.$$

である。$t = 0$ で $V_{OUT} = \frac{V_{DD}}{20}$ であるから、積分定数は $const. = \frac{1}{\frac{17}{20}V_{DD}}$ であり、

$$-\frac{1}{V_{OUT} - \frac{9}{10}V_{DD}} = \frac{\beta_2}{2C}t + \frac{1}{\frac{17}{20}V_{DD}}$$

である。

したがって、$V_{OUT} = V_{DD} - 2V_T = \frac{4}{5}V_{DD}$ となる時刻 t_2 は、

$$-\frac{1}{\frac{4}{5}V_{DD} - \frac{9}{10}V_{DD}} = \frac{\beta_2}{2C}t_2 + \frac{1}{\frac{17}{20}V_{DD}}$$

$$\therefore t_2 = \frac{300}{17} \cdot \frac{C}{\beta_2 V_{DD}}$$