東京大学大学院工学系研究科　電気工学・電子工学専攻　入試
平成 18 年　数学　第 1 問

(1)

(*) の両辺に $\frac{dx}{dt}$ を乗じて変形すると、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{2}{x^2}\frac{dx}{dt}$$

両辺を積分すると、

$$\int d\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -2\int \frac{1}{x^2}dx + C_1$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{x} + C_1$$

ここで C_1 は積分定数で、初期条件より $C_1 = 2 - \frac{2}{x_0}$ と求められる。

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \sqrt{2 + \frac{2}{x} - 2x_0}$$

なお、平方根をとる際に復号が生じるが、初期条件より負の場合は不適である。

公式

合成関数の微分であるが、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}$$

(2)

$x_0 = 1$ とすると、

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{x}}$$

変数分離して積分すると、

$$\int \sqrt{x}dx = \sqrt{2}\int dt + C_2$$

$$\frac{2}{3}x^{3/2} = \sqrt{2}t + C_2$$

ここで C_2 は積分定数で、初期条件より $C_2 = 2/3$ と求められる。

$$\therefore x = (\frac{3}{2}\sqrt{2}t + 1)^{2/3}$$

(3)

x(t) が極値をとるのは、

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x_0}} = 0$$

の時である。これを x について解くと、

$$x = \frac{x_0}{1 - x_0}$$

で極値をとることが分かる。$\frac{dx}{dt}$ は、x について単調減少で、$x < \frac{x_0}{1-x_0}$ では $\frac{dx}{dt} > 0$ である。したがって、この極値は最大値である。

東京大学大学院工学系研究科　電気工学・電子工学専攻　入試
平成 18 年　数学　第 2 問

(1)

$$\det A = a^3 + b^3 + b^3 - (ab^2 + ab^2 + ab^2) = a^3 + 2b^3 - 3ab^2$$

(2)

$$\begin{aligned}
A^{-1} =& \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & b \\ b & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & b \\ b & a \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & b \\ b & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & a \\ b & b \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \end{bmatrix} \\
=& \frac{1}{a^3 + 2b^3 - 3ab^2}\begin{bmatrix} a^2 - b^2 & b^2 - ab & b^2 - ab \\ b^2 - ab & a^2 - b^2 & b^2 - ab \\ b^2 - ab & b^2 - ab & a^2 - b^2 \end{bmatrix} \\
=& \frac{a - b}{a^3 + 2b^3 - 3ab^2}\begin{bmatrix} a + b & -b & -b \\ -b & a + b & -b \\ -b & -b & a + b \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

逆行列の公式

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{detA}}[\Delta_{ji}]$$

Δ_{ij} は、行列 A の余因子である。添え字の付き方に注意。単に成分を余因子に置き換えたものではなく、それを更に転置したものである。

対称行列の性質

　対称行列の逆行列は対称行列。対称行列の成分について、$a_{ij} = a_{ji}$ であるから、余因子について $\Delta_{ji} = \Delta_{ij}$ である。

(3)

固有方程式は、

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^3 - 3a\lambda^2 + 3(a^2 - b^2)\lambda - (a^3 - 3ab^2 + 2b^3) = 0$$

これを解くと、

$$\lambda = a - b, a + 2b$$

$\lambda = a - b$ に属する固有ベクトルは、

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = a + 2b$ に属する固有ベクトルは、

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(4)

この問題における部分空間 $W = \{\mathbf{x} | A\mathbf{x} = c\mathbf{x}\}$ は、$\mathrm{Ker}(A - cE)$ である。行列 $A - cE$ は 3×3 行列であるから、

$$3 = \mathrm{dimKer}(A - cE) + \mathrm{dimIm}(A - cE)$$

$$\therefore 3 = \mathrm{dim}W + \mathrm{rank}(A - cE)$$

なる関係が成立する。

したがって、W の次元が 1 次元となるのは、

$$\mathrm{rank}(A - cE) = 2$$

の時である。

行基本変形を繰り返すと、

$$A - cE \longrightarrow \begin{bmatrix} a - c & b & b \\ 0 & a - c + b & b \\ 0 & 0 & \frac{(a-c+b)^2 - b^2}{a-c+b} \end{bmatrix}$$

であるから、

$$\frac{(a - c + b)^2 - b^2}{a - c + b} = 0$$

$$\therefore a - c + 2b = 0$$

が条件である。

このとき、

$$A - cE \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であるから、基底は、

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

である。

行列の核と像

$m \times n$ 行列 A に対して、$A\mathbf{x}=0$ の解のなす集合を、行列 A の核という。

$$\mathrm{Ker}A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | A\mathbf{x} = 0\}$$

また、行列 A と数ベクトルの積の集合を、行列 A の像という。

$$\mathrm{Im}A = \{A\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

次元公式

$m \times n$ 行列 A の核と像の次元の間には、次の関係がある。

$$n = \mathrm{dimKer}A + \mathrm{dimIm}A$$

また、像の次元は、行列の階数に等しく、

$$\mathrm{dimIm}A = \mathrm{rank}A$$

である。

(5)

(4) と同様に考えると、W の次元が 2 次元となるのは、

$$\mathrm{rank}(A - cE) = 1$$

の時である。

行基本変形を繰り返すと、

$$A - cE \longrightarrow \begin{bmatrix}a-c & b & b\\ 0 & (a-c)^2+b^2 & (a-c)b+b^2\\ 0 & (a-c)b+b^2 & (a-c)^2+b^2\end{bmatrix}$$

であるから、

$$(a-c)^2 - b^2 = 0 \quad \text{かつ} \quad (a-c)b - b^2 = 0$$

が条件である。

$$\therefore a - c - b = 0$$

このとき、

$$A - cE \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

であるから、基底は、

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

である。

(6)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

とおくと、

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a+2b & 0 \\ 0 & 0 & -a-b \end{bmatrix}$$

である。

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}AP \cdot P^{-1}AP \ldots P^{-1}AP = P^{-1}A^nP$$

$$\begin{aligned} A^n =& P \begin{bmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a+2b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{bmatrix}^n P^{-1} \\ =& P \begin{bmatrix} (a-b)^n & 0 & 0 \\ 0 & (a+2b)^n & 0 \\ 0 & 0 & (a-b)^n \end{bmatrix} P^{-1} \\ =& \frac{1}{3}\begin{bmatrix} (a+2b)^n+2(a-b)^n & (a+2b)^n-(a-b)^n & (a+2b)^n-(a-b)^n \\ (a+2b)^n-(a-b)^n & (a+2b)^n+2(a-b)^n & (a+2b)^n-(a-b)^n \\ (a+2b)^n-(a-b)^n & (a+2b)^n-(a-b)^n & (a+2b)^n+2(a-b)^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

東京大学大学院工学系研究科　電気工学・電子工学専攻　入試
平成 18 年　物理　第 3 問

(1)

スイッチを閉じた瞬間のインダクタのインピーダンスは無限大であるから、

$$i_1(0) = 0$$

$$i_2(0) = \frac{10\mathrm{V}}{(3\Omega + 2\Omega)//(1\Omega + 4\Omega)} = \frac{10\mathrm{V}}{5/2\Omega} = 4\mathrm{A}$$

端子 A と端子 B を開放した時、AB 間に生じる電圧は、

$$10\mathrm{V} \times \frac{2\Omega}{2\Omega + 3\Omega} - 10\mathrm{V} \times \frac{4\Omega}{4\Omega + 2\Omega} = -4\mathrm{V}$$

また、電圧源を短絡として、AB 間に見える抵抗を求めると、

$$3\Omega + (3\Omega//2\Omega) + (1\Omega + 4\Omega) = 5\Omega$$

したがって、テブナン等価回路は、$-4\mathrm{V}$ の電圧源と、5Ω の抵抗を直列に接続した回路になる。(図略)

テブナンの定理

電源を含む線形な回路がある。この回路の端子対の電圧が v であり、その端子間から回路を見た時の内部抵抗が r であるとする。このとき、この回路は、電圧源 v と内部抵抗 r を直列接続したような回路と等価である。

(2)

回路方程式は、

$$4\mathrm{V} = 5\Omega \times i_1 + 2\mathrm{H} \times \frac{di_1}{dt}$$

この微分方程式を解くと、

$$i_1 = ke^{-\frac{5}{2}t} + \frac{4}{5}$$

ここで、k は積分定数で、i_1 の初期値より $k = -\frac{4}{5}$ である。

$$\therefore i_1(t) = \frac{4}{5}(1 - e^{-\frac{5}{2}t})$$

(グラフ略)

(3)

1Ω の抵抗に流れる電流を i_3 とおく。

$$10\mathrm{V} = 2 \times \Omega(i_1 + i_2 - i_3) + 3\Omega \times (i_2 - i_3)$$

$$10\mathrm{V} = 4\Omega \times (i_3 - i_1) + 1\Omega \times i_3$$

これらから i_3 を消去すると、

$$i_2 = 4 + \frac{2}{5}i_1 = \frac{216}{50} - \frac{1}{25}e^{-\frac{5}{2}t}$$

(グラフ略)

(4)

(1) と同様に端子 A と端子 B を開放して、テブナン等価回路の電圧源の大きさを求める。12V の電源から流れる電流 i は、

$$12\mathrm{V} = 0.5\Omega \times i + \frac{5}{2}\Omega \times i$$

$$\therefore i = 4\mathrm{A}$$

したがって、AB 間に生じる電圧は、

$$2\Omega \times \frac{4}{2}\mathrm{A} - 4\Omega \times \frac{4}{2}\mathrm{A} = -4\mathrm{V}$$

また、12V の電源を短絡して、AB 間の合成抵抗を求めると、$\frac{31}{15}\Omega$ が得られる。したがって、テブナン等価回路は、$-4\mathrm{V}$ の電圧源と、$\frac{31}{15}\Omega$ の抵抗を直列に接続した回路である。

東京大学大学院工学系研究科　電気工学・電子工学専攻　入試
平成 18 年　物理　第 4 問

(1)

(1-1)

　非反転入力端子の電位が 0、反転入力端子の電位が Δv であるから、

$$v_{out} = A(0 - \Delta v) = -A\Delta v$$

$$\therefore \Delta v = -\frac{v_{out}}{A}$$

オペアンプの入力インピーダンスは無限大であるから、抵抗 R_1 と抵抗 R_2 に流れる電流は等しい。

$$\frac{v_{in} - \Delta v}{R_1} = \frac{\Delta v - v_{out}}{R_2}$$

$$\therefore v_{out} = -\frac{AR_2}{(1+A)R_1 + R_2} v_{in}$$

(1-2)

　(1-1) より、

$$\Delta v = -\frac{v_{out}}{A} = \frac{R_2}{(1+A)R_1 + R_2} v_{in}$$

(1-3)

$$G = \frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{AR_2}{(1+A)R_1 + R_2} \xrightarrow[A\to\infty]{} -\frac{R_2}{R_1}$$

$$\Delta v = \frac{R_2}{(1+A)R_1 + R_2} v_{in} \xrightarrow[A\to\infty]{} 0$$

理想的なオペアンプ

　理想的なオペアンプは増幅率が無限大である。このときの反転増幅率と仮想接地を示している。

　理想的なオペアンプが有する特性は以下である。

- 差動電圧利得:∞
- 同窓電圧利得:0
- 入力インピーダンス:∞
- 出力インピーダンス:0
- 入力オフセット電圧:0
- 周波数特性:全ての帯域で一定
- スルーレート:∞

(2)

(2-1)

(1) の結果から、オペアンプの二つの入力端子の電位は等しく、これを v_x とおく。オペアンプの入力インピーダンスは無限大であるから、反転入力端子側の抵抗 R_1 と抵抗 R_2 に流れる電流は等しい。

$$\frac{v_x - v_a}{R_1} = \frac{v_{out} - v_x}{R_2}$$

同様に、非反転入力端子側の抵抗 R_1 と抵抗 R_2 に流れる電流も等しく、

$$\frac{v_x}{R_2} = \frac{v_b - v_x}{R_1}$$

この 2 式から、v_x を消去すると、

$$v_{out} = \frac{R_2}{R_1}(v_b - v_a)$$

減算器

オペアンプを用いた典型的な減算器である。

(2-2)

図 4 の v_a と v_b を代入すると、

$$v_{out} = \frac{R_1}{R_2}(b - a)t$$

(グラフ略)

(3)

(3-1)

コンデンサの両端にかかる電圧を v_C、コンデンサに流れる電流を I とすると、

$$v_C = \frac{1}{C}\int Idt$$

$$v_{out} = v_C$$

$$v_{in} = -RI$$

以上の 3 式から、v_C と I を消去すると、

$$v_{out} = -\frac{1}{CR}\int v_{in} dt$$

積分器

　オペアンプを用いた典型的な積分器である。

コンデンサの性質

$$v_C = \frac{1}{C}\int I dt$$

電流と電圧には方向があるので、確認しておく。電流がコンデンサに流れ込む側が高電位、電流がコンデンサから流れ出す側が低電位である。

(3-2)

　$0 \leq t \leq T$ において、

$$v_{in} = \frac{P}{T}t$$

であるから、

$$v_{out} = -\frac{1}{CR}\int_0^t \frac{P}{T}\tau d\tau = -\frac{P}{2TCR}t^2$$

　$T \leq t \leq 2T$ において、

$$v_{in} = -\frac{P}{T}t + 2P$$

であるから、

$$v_{out} = \frac{P}{2TCR}(t-2T)^2 - \frac{PT}{CR}$$

　$2T \leq t$ において、

$$v_{in} = 0$$

であるから、

$$v_{out} = -\frac{PT}{CR}$$

　まとめると、

$$v_{out} = \begin{cases} -\frac{P}{2TCR}t^2 & ; 0 \leq t \leq T \\ \frac{P}{2TCR}(t-2T)^2 - \frac{PT}{CR} & ; T \leq t \leq 2T \\ -\frac{PT}{CR} & ; 2T \leq t \end{cases}$$

　これをグラフに示せば良い。(グラフ略)

オペアンプによる演算回路

参考程度に。

- 入力素子:R、帰還素子:R $\longrightarrow$ 定数倍、加算、減算
- 入力素子:R、帰還素子:C $\longrightarrow$ 積分
- 入力素子:C、帰還素子:R $\longrightarrow$ 微分
- 入力素子:R、帰還素子:BJT $\longrightarrow$ 対数
- 入力素子:BJT、帰還素子:R $\longrightarrow$ 逆対数

東京大学大学院工学系研究科　電気工学・電子工学専攻　入試
平成18年　物理　第5問

(1)

接線方向の運動方程式は、

$$m(a+b)\frac{d^2\theta}{dt^2} = mg\sin\theta - F$$

(2)

法線方向の運動方程式は、

$$m(a+b)(\frac{d\theta}{dt})^2 = mg\cos\theta - N$$

(3)

円筒 B の重心を中心とした慣性モーメント I は、

$$I = \iint \frac{m}{\pi b^2}dr \cdot rd\theta \cdot r^2 = \frac{1}{2}mb^2$$

回転に関する運動方程式は、

$$I\frac{d\omega}{dt} = F \cdot b$$

(4)

円筒は滑らないので、その転がる円弧の長さから、

$$ad\theta = b(\omega dt - d\theta)$$

$$\therefore (a+b)\frac{d\theta}{dt} = b\omega$$

(5)

(1)、(3)、(4) で得られた式より、F と ω を消去すると、

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{2g}{3(a+b)}\sin\theta$$

両辺に $2\frac{d\theta}{dt}$ をかけて、与えられた公式を利用すると、

$$\frac{d}{dt}(\frac{d\theta}{dt})^2 = \frac{4g}{3(a+b)}\sin\theta d\theta$$

両辺の積分を取ると、

$$(\frac{d\theta}{dt})^2 = \frac{4g}{3(a+b)}\int \sin\theta d\theta + C$$

ここで、C は積分定数であり、初期条件より $\frac{4g}{3(a+b)}$ と求められる。

$$\therefore (\frac{d\theta}{dt})^2 = \frac{4g}{3(a+b)}(1-\cos\theta)$$

これを (2) で得られた式に代入し、更に $N=0$ の条件を用いると、

$$\cos\theta_d = \frac{4}{7}$$

東京大学大学院新領域創成科学研究科　基盤情報学専攻　入試
平成18年　専門科目　第2問

(1)

L と R の直列接続のインピーダンス Z_1 は、

$$Z_1 = j\omega L + R$$

である。これを用いて、Z_2 は、

$$Z_2 = j\omega L + R // Z_1 = \frac{2R^3 + \omega^2 L^2 R}{4R^2 + \omega^2 L^2} + j\frac{5\omega L R^2 + \omega^3 L^3}{4R^2 + \omega^2 L^2}$$

したがって、抵抗分は、

$$\mathrm{Re}\{Z_2\} = \frac{2R^3 + \omega^2 L^2 R}{4R^2 + \omega^2 L^2}$$

であり、リアクタンス分は、

$$\mathrm{Im}\{Z_2\} = \frac{5\omega L R^2 + \omega^3 L^3}{4R^2 + \omega^2 L^2}$$

である。

(2)

$\frac{\omega L}{R} << 1$ を用いて近似する。抵抗分について、

$$\mathrm{Re}\{Z_2\} = \frac{R\left\{2 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2\right\}}{4 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2} \fallingdotseq \frac{1}{2}R$$

であり、リアクタンス分について、

$$\mathrm{Im}\{Z_2\} = \frac{\omega L\left\{5 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2\right\}}{4 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2} \fallingdotseq \frac{5}{4}\omega L$$

である。

したがって、

$$Z_2 \fallingdotseq \frac{1}{2}R + j\frac{5}{4}\omega L$$

定性的な理解

低周波域でのインピーダンスを問う問題である。低周波でのインダクタのインピーダンスは低く、ただの導線のように見える。端子から遠い方のインダクタが導線に見えると、抵抗が並列接続されているように見え、抵抗分が $\frac{1}{2}R$ になる。この抵抗分に端子側のインダクタが直列接続され、$\frac{1}{2}R + j\omega L$ 程度と考えられる。実際に計算してみるとは、リアクタンス分は $j\frac{5}{4}\omega L$ で、これは端子から遠い方のインダクタの成分が含まれているためと考えられる。

(3)

$\frac{R}{\omega L} << 1$ を用いて近似する。抵抗分について、

$$\mathrm{Re}\{Z_2\} = \frac{R\left\{2\left(\frac{R}{\omega L}\right)^2 + 1\right\}}{4\left(\frac{R}{\omega L}\right)^2 + 1} \fallingdotseq R$$

であり、リアクタンス分について、

$$\mathrm{Im}\{Z_2\} = \frac{\omega L\left\{5\left(\frac{R}{\omega L}\right)^2 + 1\right\}}{4\left(\frac{R}{\omega L}\right)^2 + 1} \fallingdotseq \omega L$$

である。

したがって、

$$Z_2 \fallingdotseq R + j\omega L$$

定性的な理解

高周波域でのインピーダンスを問う問題である。高周波ではインダクタのインピーダンスは高く、開放されているように見える。端子から遠い方のインダクタが開放されているとみると、インダクタ L と抵抗 R の直列接続に見え、インピーダンスが $R + j\omega L$ となる。

(4)

(1)、(2)、(3) より、

$$|Z_2| = \begin{cases} \frac{1}{2}R & ; \omega = 0 \\ \sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{25}{16}\omega^2 L^2} & ; \omega << \frac{R}{L} \\ \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} & ; \frac{R}{L} << \omega \\ \infty & ; \omega \to \infty \end{cases}$$

$$\arg Z_2 = \begin{cases} 0 & ; \omega = 0 \\ \tan^{-1} \frac{5\omega L}{2R} & ; \omega << \frac{R}{L} \\ \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} & ; \frac{R}{L} << \omega \\ \frac{\pi}{2} & ; \omega \to \infty \end{cases}$$

これを元に絶対値と偏角の概形を描けば良い。(グラフ略)

(5)

$n = 1$ で、

$$Z_1 = j\omega L + R$$

であり、$n \geq 1$ に対して、インピーダンスは以下の漸化式で表現できる。

$$Z_{n+1} = j\omega L + R//Z_n = j\omega L + \frac{RZ_n}{R + Z_n}$$

複素数の収束

東京大学大学院新領域創成科学研究科　基盤情報学専攻　入試
平成18年　専門科目　第7問

(1)

クロックが立ち上がると Q は 1 になる。フリップフロップの RST に 1 が入力されるまで 1 を維持する。RST 端子には遅延回路が接続されているので、Q が 1 になってから τ 後に RST は 1 になる。

したがって、クロックと同時に立ちあがり、τ だけ 1 を維持するような波形になる。(図略)

(2)

$\Delta t > 0$ のときを考える。まず、A が立ち上がることで、α が立ち上がる。δ 後に AND 回路が出力を生成するが、β が 0 であるから、出力も 0 を維持する。

次に B が立ち上がることで、β が立ち上がる。δ 後に AND 回路が出力を生成し、2 つのフリップフロップの RST 端子に 1 が入力される。ここで、α と β が立ち下がり、その δ 後に AND 回路の出力が再び 0 に戻る。

以上より、α は、A の立ち上がりと同時に立ち上がり、$\Delta t + \delta$ 後に立ち下がる。β は、B の立ち上がりと同時に立ちあがり、δ 後に立ち下がる。(図略)

$\Delta t < 0$ のときは、A と B、および α と β を逆に考えれば良い。したがって、β は、B の立ち上がりと同時に立ち上がり、$\Delta t + \delta$ 後に立ち下がる。α は、A の立ち上がりと同時に立ちあがり、δ 後に立ち下がる。(図略)

(3)

$\Delta t > 0$ の時を考える。$\delta << T$ より、β の立ち上がり期間は無視して、α が立ち上がっている期間だけ電流が流れる。α が 1 の期間で、PMOSFET は導通し、$I_{OUT} = I_0$ となる。それ以外の期間では、出力は切り離されて、$I_{OUT} = 0$ となる。(図略)

$\Delta t < 0$ の時を考える。$\delta << T$ より、α の立ち上がり期間は無視して、β が立ち上がっている期間だけ電流が流れる。β が 1 の期間で、NMOSFET は導通し、$I_{OUT} = -I_0$ となる。それ以外の期間では、出力は切り離されて、$I_{OUT} = 0$ となる。(図略)

(4)

まず、$0 < \Delta t < \frac{T}{2}$ の時を考える。(3) の結果より、電流 I_0 が流れる期間は、Δt であり、出力電流の時間平均値は、

$$< I_{OUT} >= I_0 \frac{\Delta t}{T}$$

である。

$-\frac{T}{2} < \Delta t < 0$ のときも同様に、

$$< I_{OUT} >= -I_0 \frac{\Delta t}{T}$$

である。

他の期間では、周期性を利用してグラフを描くことができる。(図略)