東京大学大学院工学系研究科　電気工学・電子工学専攻　入試
平成 19 年　数学　第 1 問

(1)

$z = y^{-1}$ という変換を用いると、

$$y = z^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = -z^{-2}\frac{dz}{dx}$$

$$\therefore (x^2+1)\frac{dz}{dx} - 4xz = -4ax \qquad (**)$$

ベルヌーイ方程式

ベルヌーイ方程式とは、

$$y^{'} + p(x)y = q(x)y^n$$

という形の微分方程式である。$n = 0, 1$ の時は線形微分方程式である。そうでない場合は、$z = y^{1-n}$ と変換することで、z に関する線形微分方程式になる。

(2)

$a = 0$ のとき、(**) は斉次形となる。

$$(x^2+1)\frac{dz}{dx} - 4xz = 0$$

$$\int \frac{1}{z}dz = \int \frac{4x}{x^2+1}dx + C_1$$

$$\log|z| = 2\log|x^2+1| + C_1$$

$$\log\left|\frac{z}{e^{C_1}(x^2+1)^2}\right| = 0$$

$$\therefore z = C_2(x^2+1)^2$$

ここで、C_1 および $C_2 = \pm e^{C_1}$ は積分定数である。求める解は、

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{C_2(x^2+1)^2}$$

(3)

(2) で得られた解の係数 C_2 を $C_2(x)$ と置き換えて、

$$z = C_2(x)(x^2+1)^2$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}C_2(x)\cdot(x^2+1)^2 + C_2(x)4x(x^2+1)$$

これを (*) に代入すると、

$$\frac{d}{dx}C_2(x) = -4a\frac{x}{(x^2+1)^3}$$

両辺を積分すると、

$$C_2(x) = -4a\int\frac{x}{(x^2+1)^3}dx = \frac{a}{(x^2+1)^2} + C_3$$

したがって、一般解は、

$$z = C_2(x)(x^2+1)^2 = a + C_3(x^2+1)^2$$

$$\therefore y = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + C_3(x^2+1)^2}$$

係数関数の積分

思いつかない場合は、以下のように置換積分する。

$$\begin{aligned}
C_2(x) =& -4a\int\frac{x}{(x^2+1)^3}dx \\
=& -4a\int\frac{\pm\sqrt{t-1}}{t^3}\cdot\frac{1/2}{\pm\sqrt{t-1}}dt(t = x^2+1 \text{ による置換積分}) \\
=& -2a\int\frac{dt}{t^3} \\
=& a\frac{1}{t^2} + C_3 \\
=& \frac{a}{(x^2+1)^2} + C_3
\end{aligned}$$

非斉次方程式の一般解

斉次形の微分方程式の一般解と、非斉次形の微分方程式の特殊解を求める。これらの和が、非斉次形の微分方程式の一般解である。

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

という微分方程式を解くことを考える。

斉次形の一般解を $\tilde{y}$ とすると、

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} + P(x)\tilde{y} = 0$$

非斉次形の特殊解を Y とすると、

$$\frac{dY}{dx} + P(x)Y = Q(x)$$

これらの和を元の微分方程式に代入すると、

$$\frac{d}{dx}(\tilde{y} + Y) + P(x)(\tilde{y} + Y) = Q(x)$$

$$(\text{左辺}) = \left(\frac{d\tilde{y}}{dx} + P(x)\tilde{y}\right) + \left(\frac{dY}{dx} + P(x)Y\right) = Q(x)$$

したがって、$\tilde{y} + Y$ は、解くべき微分方程式の解である。また、$\tilde{y}$ には 1 つの任意定数が含まれているので、$\tilde{y} + Y$ にも 1 つの任意定数が含まれており、これは一般解である。

東京大学大学院工学系研究科　電気工学・電子工学専攻　入試
平成 19 年　数学　第 2 問

(1)

$$|\mathrm{A}| = 0 - 4 + 2 - (2 + 0 - 2) = -2$$

行列式

$$\det(a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$$

ここで、Δ_{ij} は余因子といい、a_{ij} についての小行列式に $(-1)^{i+j}$ をかけたものである。なお、小行列式とは、n 次の行列から第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $n-1$ 次の行列式のことである。

2 次行列、3 次行列の場合は、斜め方向の成分を掛け合わせることで行列式が求められる。

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (ceh + bdi + afh)$$

行列式の性質

転置行列の行列式は、元の行列の行列式に等しい。

$$\det a_{ij} = \det a_{ji}$$

したがって、以下の性質は、行と列をそのまま読み替えても成立する。

- 行列のある 2 行を交換すると、行列式は -1 倍される。
- 行列のある 1 行に定数 c をかけると、行列式は c 倍される。
- 行列の 2 行が等しいと、行列式は 0 になる。
- 行列のある 1 行に他の 1 行を足し合わせても、行列式は変わらない。

(2)

固有方程式は、

$$|\lambda \mathrm{E} - A| = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

ここで、λ は求める固有値、E は単位行列である。

$$(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\therefore \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$$

各固有値に属する固有ベクトルは、$[-3, 4, 2]^T$、$[1, -2, 2]^T$、$[0, 1, -1]^T$ であるから、

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

固有値

n 次の正方行列 A に対して、$\mathrm{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ を満たす λ を A の固有値という。$\mathbf{x}$ を λ に対応する固有ベクトルという。

固有値の性質

$\phi(\lambda) = |\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E}|$ が正方行列 A の固有多項式であるとすると、$\phi(\mathrm{A}) = 0$
正方行列 A の互いに異なる固有値に対応する固有ベクトルは 1 次独立である。

(3)

$\vec{z}$ の定義より、

$$\vec{z} = \mathrm{P}^{-1}\vec{y}$$

$$\therefore \vec{z'} = \mathrm{P}^{-1}\vec{y'} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\vec{y} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\vec{z}$$

であるから、

$$\frac{dz_1}{dx} = \lambda_1 z_1 = -z_1$$

$$\frac{dz_2}{dx} = \lambda_2 z_2 = z_2$$

$$\frac{dz_3}{dx} = \lambda_3 z_3 = 2z_3$$

これを解いて、

$$z_1 = \alpha e^{-x}$$

$$z_2 = \beta e^{x}$$

$$z_3 = \gamma e^{2x}$$

(4)

$$\vec{y} = \mathrm{P}\vec{z} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha e^{-x} \\ \beta e^{x} \\ \gamma e^{2x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\alpha e^{-x} + \beta e^{x} \\ 4\alpha e^{-x} - 2\beta e^{x} + \gamma e^{2x} \\ 2\alpha e^{-x} + 2\beta e^{x} - \gamma e^{2x} \end{bmatrix}$$

$x = 0$ の境界条件より、

$$y_1 = -3\alpha + \beta = -2$$

$$y_2 = 4\alpha - 2\beta + \gamma = 3$$

$$y_3 = 2\alpha + 2\beta - \gamma = 3$$

$$\therefore \alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1$$

以上より、

$$y_1 = -3e^{-x} + e^{x}$$

$$y_2 = 4e^{-x} - 2e^{x} + e^{2x}$$

$$y_3 = 2e^{-x} + 2e^{x} - e^{2x}$$

東京大学大学院工学系研究科　電気工学・電子工学専攻　入試
平成 19 年　物理　第 3 問

(1)

C_1 と R_1 の並列接続の合成インピーダンスは、

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C_1} // R_1 = \left(j\omega C_1 + \frac{1}{R_1}\right)^2$$

であり、C_2、R_2 の直列接続と、R_1 の合成インピーダンスは、

$$Z_2 = \left(\frac{1}{j\omega C_2} + R_2\right) // R_1 = \left(\frac{1}{\frac{1}{j\omega C_2} + R_2} + \frac{1}{R_1}\right)^2$$

である。

これらの合成インピーダンスで入力信号 e を分圧したものが出力に現れるので、

$$v = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} e$$

これを計算すると、

$$v = \frac{1 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + j\omega(C_1 R_1 + C_2 R_2)}{2 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + j\omega(C_1 R_2 + C_2 R_1 + 2C_2 R_2)} e$$

である。

伝達関数 G は、

$$G = \frac{v}{e} = \frac{1 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + j\omega(C_1 R_1 + C_2 R_2)}{2 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + j\omega(C_1 R_2 + C_2 R_1 + 2C_2 R_2)}$$

(2)

伝達関数の分子は、

$$1 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + j\omega(C_1 R_1 + C_2 R_2) = (1 + j\omega C_1 R_1)(1 + j\omega C_2 R_2)$$

と因数分解できる。

分母の虚部について、

$$C_1 R_2 + C_2 R_1 + 2C_2 R_2 = (2C_1 R_2 + C_2 R_1) + (2C_2 R_2 - C_1 R_2) \fallingdotseq 2C_1 R_2 + C_2 R_1$$

と近似すると、

$$2 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + j\omega(2C_1 R_2 + C_2 R_1) = (2 + j\omega C_2 R_1)(1 + j\omega C_1 R_2)$$

である。
　まとめると、伝達関数は、

$$G \fallingdotseq \frac{(1+j\omega C_1R_1)(1+j\omega C_2R_2)}{(2+j\omega C_2R_1)(1+j\omega C_1R_2)}$$

である。
　伝達関数の振幅は、

$$|G| = \frac{|1+j\omega C_1R_1||1+j\omega C_2R_2|}{|2+j\omega C_2R_1||1+j\omega C_1R_2|} = \sqrt{\frac{(1-\omega^2C_1^2R_1^2)(1-\omega^2C_2^2R_2^2)}{(4-\omega^2C_2^2R_1^2)(1-\omega^2C_1^2R_2^2)}}$$

であり、これを折れ線近似を用いてグラフに表せば良い。(グラフ略)

近似

　強引すぎる気がする。低域と高域を強調するという目的が果たせていないので、間違っていると思われる。

(3)

　$\alpha = 0$ のとき、出力 v' は明らかに 0 である。
　$0 < \alpha < 0.5$ のとき、(1) で得られた v を、$2\alpha R_1$ と $(1-2\alpha)R_1$ という抵抗で分圧したものが出力 v' に現れるので、

$$G' = \frac{2\alpha R_1}{R_1}G = 2\alpha G$$

である。
　$\alpha = 0.5$ のときについては、(2) で求めた。
　$0.5 < \alpha < 1$ のとき、先の計算と同様に、$e - v$ を $2(1-\alpha)R_1$ と $(2\alpha-1)R_1$ なる抵抗で分圧したものが、出力 v' に対して、$e - v'$ として表れるので、

$$G' = (2\alpha - 1) + 2(1-\alpha)G$$

である。
　$\alpha = 1$ のとき、v' は明らかに e である。
　以上をグラフにまとめれば良い。(グラフ略)

グラフの描き方

　グラフを描くときのポイントをまとめる。

- 特徴ある点の値を代入する。(ex.$x = 0$、$x \to \pm\infty$ など)
- 簡単に微分できるなら微分して増減を調べる。
- それができなければ、変数が増加した場合、関数全体して増加するのか減少するのかを調べる。
- 変数が十分に小さい域と、十分に大きい域で近似をしながらグラフを描く。
- 漸近線がないか調べる。

東京大学大学院工学系研究科　電気工学・電子工学専攻　入試
平成 19 年　物理　第 4 問

(1)

内部抵抗 r_d と電流源 $g_m v_{gs}$ の並列接続を、内部抵抗 r_d と電圧源 $-r_d g_m v_{gs}$ の直列接続にすれば良い。(図略)

電圧源と電流源の変換

電流源は、理想電流源 i と内部抵抗 r の並列接続からなる。電圧源は、理想電圧源 v と内部抵抗 r の直列接続からなる。$v = -ri$ のとき、これらは等価である。

(2)

(図略)

(3)

(3-1)

差動回路

(3-2)

トランジスタ T1 の DS 間に流れる電流を i_1、トランジスタ T2 の DS 間に流れる電流を i_2 とする。小信号等価回路より、

$$r_d g_m v_1 = R_s(i_1 + i_2) + (r_d + R_L)i_1$$

$$r_d g_m v_2 = R_s(i_1 + i_2) + (r_d + R_L)i_2$$

$$v_3 = -R_L i_1$$

$$v_4 = -R_L i_2$$

が得られる。したがって、

$$r_d g_m v_{in} = (r_d + R_L)(i_2 - i_1)$$

$$v_{out} = -R_L(i_2 - i_1)$$

であり、

$$v_{out} = -\frac{R_L r_d g_m}{r_d + R_L} v_{in}$$

$$\therefore A = -\frac{R_L r_d g_m}{r_d + R_L}$$

別解

大信号も含めた解法。
トランジスタ T1 の GS 間の電圧を v_{gs1}、DS 間に流れる電流を I_1 とすると、

$$v_{gs1} = v_1 + V_1 - R_S(I_1 + I_2)$$

同様に、トランジスタ T2 の GS 間の電圧を v_{gs2}、DS 間に流れる電流を I_2 とすると、

$$v_{gs2} = v_2 + V_1 - R_S(I_1 + I_2)$$

$$\therefore v_{gs1} - v_{gs2} = v_1 - v_2 = v_{in}$$

各トランジスタの S 端子から電源までの電位差は等しいので、

$$(R_L + r_d)I_1 - r_d g_m v_{gs1} = (R_L + r_d)I_2 - r_d g_m v_{gs2}$$

$$\therefore I_1 - I_2 = \frac{r_d g_m}{R_L + r_d}(v_{gs1} - v_{gs2})$$

出力電圧は、

$$\begin{aligned}
v_{out} =& v_3 - v_4 \\
=& (r_d I_1 - r_d g_m v_{gs1}) - (r_d I_2 - r_d g_m v_{gs2}) \\
=& r_d(I_1 - I_2) - r_d g_m(v_{gs1} - v_{gs2}) \\
=& r_d \frac{r_d g_m}{R_L + r_d}(v_{gs1} - v_{gs2}) - r_d g_m(v_{gs1} - v_{gs2}) \\
=& -\frac{R_L r_d g_m}{R_L + r_d} v_{in}
\end{aligned}$$

$$\therefore A = -\frac{R_L r_d g_m}{R_L + r_d}$$

(3-3)

傾き A の線形なグラフになる。(グラフ略)

(4)

(2) の 4 式より、

$$r_d g_m v_{in} = (2R_S + r_d + R_L)(i_1 + i_2)$$

$$v_{out} = -R_L(i_1 + i_2)$$

$$\therefore v_{out} = -\frac{R_L r_d g_m}{2R_S + r_d + R_L} v_{in}$$

$$\therefore A^{'} = -\frac{R_L r_d g_m}{2R_S + r_d + R_L}$$

(5)

$A^{'}$ の方が分子が大きいので、絶対値で考えると、

$$|A^{'}| \leq |A|$$

統合が成立するのは、$R_S = 0$ の時である。

(6)

v_1 と v_2 を逆位相の電圧とし、その差を信号として扱うことで同相ノイズを除去できる。たとえば同相ノイズ Δv_n が信号電圧に加わった場合、

$$v_1^{'} = v_1 + \Delta v_n$$

$$v_2^{'} = v_2 + \Delta v_n$$

であるが、その差をとると

$$v_1^{'} - v_2^{'} = (v_1 - v_2) + (\Delta v_n - \Delta v_n) = v_1 - v_2$$

として、同相ノイズを除去できる。

東京大学大学院工学系研究科　電気工学・電子工学専攻　入試
平成 19 年　物理　第 5 問

(1)

円板を r 方向と θ 方向の小片に分割して慣性モーメントを求める。

$$
\begin{aligned}
I_Z =& \iint \frac{M}{\pi a^2} \cdot dr \cdot r d\theta \cdot r^2 \\
=& \frac{M}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr \\
=& \frac{1}{2} M a^2
\end{aligned}
$$

慣性モーメント

z 軸まわりの慣性モーメントは、

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2$$

ここで、m_i は質点の質量、r_i は質点の z 軸までの距離である。

(2)

$$
\begin{aligned}
I_X =& \iint \frac{M}{\pi a^2} \cdot dr \cdot r d\theta \cdot (r \sin\theta)^2 \\
=& \frac{M}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta \int_0^a r^3 dr \\
=& \frac{1}{4} M a^2
\end{aligned}
$$

対称性から、

$$I_Y = I_X = \frac{1}{4} M a^2$$

$$\therefore I_Z = I_X + I_Y$$

薄板の定理

この問いで求めた結果を薄板の定理と呼ぶ。厚さの無視できる板の面内に x 軸と y 軸をとり、垂直に z 軸を取ると、

$$I_z = I_x + I_y$$

(3)

$\mathrm{Z_b}$ 軸は重心を通っているから、求める慣性モーメントは、

$$I(h) = I_Z + Mh^2 = M(\frac{a^2}{2} + h^2)$$

平行軸の定理

この問いでは平行軸の定理と呼ばれる定理を用いている。剛体の全質量を M、重心を通る軸に関する慣性モーメントを I_G とすると、その軸から距離 h だけ平行移動させた z 軸に関する完成モーメントは、

$$I_z = I_G + Mh^2$$

(4)

ばねの力は中心力であるから、円板の角運動量は保存する。

$$I(L_0 + a)\omega_0 = I(L_1 + a)\omega_1$$

$$\left\{M\left(\frac{a^2}{2} + (L_0 + a)^2\right)\right\}\omega_0 = \left\{M\left(\frac{a^2}{2} + (L_1 + a)^2\right)\right\}\omega_1$$

$$\left\{M\left(\frac{a^2}{2} + (3a)^2\right)\right\}\omega_0 = \left\{M\left(\frac{a^2}{2} + (4a)^2\right)\right\}\omega_1$$

$$\therefore \frac{\omega_0}{\omega_1} = \frac{33}{19}$$

(5)

求めるエネルギー E は、回転運動のエネルギーの変化に等しいので、

$$E = \frac{1}{2}I(L_1 + a)\omega^2 - \frac{1}{2}I(L_0 + a)\omega^2 = -\frac{231}{38}Ma^2\omega_1^2$$

(6)

円板の重心は、バネが切れる前の速度のまま運動を続けるので、並進運動の速度 v_1 は、

$$v_1 = (L_1 + a)\omega_1 = 4a\omega_1$$

であり、バネが切れる前の円運動の接線方向に等速直線運動をする。

バネが切れる前の円板の外側の速度 v_{ex} は、

$$v_{ex} = (L_1 + 2a)\omega_1 = 5a\omega_1$$

であり、同様に円板の内側の速度 v_{in} は、

$$v_{in} = L_1\omega_1 = 3a\omega_1$$

である。バネが切れると、この速度差が回転運動を生じるので、円板の重心から見て角速度 ω の回転運動をする。回転の方向は ω_1 の方向と等しい。

東京大学大学院新領域創成科学研究科　基盤情報学専攻　入試
平成 19 年　専門科目　第 3 問

(1)

初期値が $(\mathrm{S0in}, \mathrm{S1in}) = (0, 0)$ に設定されているので、

- $(\mathrm{S0in}, \mathrm{S1in}) = (0, 0) \longrightarrow |A| = |B|$
- $(\mathrm{S0in}, \mathrm{S1in}) = (0, 1) \longrightarrow |A| < |B|$
- $(\mathrm{S0in}, \mathrm{S1in}) = (1, 0) \longrightarrow |A| > |B|$

という意味を持たせることにする。
$(\mathrm{S0in}, \mathrm{S1in}) = (0, 0)$ のとき、

- $(a_i, b_i) = (0, 0), (1, 1) \longrightarrow (\mathrm{S0in}, \mathrm{S1in}) = (0, 0)$
- $(a_i, b_i) = (0, 1) \longrightarrow (\mathrm{S0in}, \mathrm{S1in}) = (0, 1)$
- $(a_i, b_i) = (1, 0) \longrightarrow (\mathrm{S0in}, \mathrm{S1in}) = (1, 0)$

$(\mathrm{S0in}, \mathrm{S1in}) = (0, 1), (1, 0)$ のとき、入力に関わらず、$(\mathrm{S0in}, \mathrm{S1in})$ は維持される。
以上を状態遷移図に表せば良い。(図略)

(2)

$(\mathrm{S0in}, \mathrm{S1in}) = (0, 0)$ のとき、

- $(a_i, b_i) = (0, 0), (1, 1) \longrightarrow (\mathrm{S0in}, \mathrm{S1in}) = (0, 0)$
- $(a_i, b_i) = (0, 1) \longrightarrow (\mathrm{S0in}, \mathrm{S1in}) = (0, 1)$
- $(a_i, b_i) = (1, 0) \longrightarrow (\mathrm{S0in}, \mathrm{S1in}) = (1, 0)$

$(\mathrm{S0in}, \mathrm{S1in}) = (0, 1)$ のとき、

- $(a_i, b_i) = (1, 0) \longrightarrow (\mathrm{S0in}, \mathrm{S1in}) = (1, 0)$
- $(a_i, b_i) = (0, 0), (0, 1), (1, 1) \longrightarrow (\mathrm{S0in}, \mathrm{S1in}) = (0, 1)$

$(\mathrm{S0in}, \mathrm{S1in}) = (1, 0)$ のとき、

- $(a_i, b_i) = (0, 1) \longrightarrow (\mathrm{S0in}, \mathrm{S1in}) = (0, 1)$

- $(a_i, b_i) = (0,0),(1,0),(1,1) \longrightarrow (\mathrm{S0in}, \mathrm{S1in}) = (1,0)$

以上を状態遷移図に表せば良い。(図略)

(3)

(1) の状態遷移図を用いて、回路とデコーダを設計する。
まず、図 1 の回路の真理値表を書く。

a_i	b_i	S0in	S1in	S0out	S1out
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	φ	φ
0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	φ	φ
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	φ	φ
1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	φ	φ

ここで、φ は冗長項を表す。これをカルノー図に表し、論理式を求めると、

$$\mathrm{S0out} = \mathrm{S1in} + \overline{\mathrm{S0in}} \cdot \overline{a_i} \cdot b_i$$

$$\mathrm{S1out} = \mathrm{S0in} + \overline{\mathrm{S1in}} \cdot a_i \cdot b_i$$

これを AND、OR、NOT ゲートで表現すれば良い。(図略)

(4)

2 の補数

ある数と、その 2 の補数を足し合わせると、桁上がりが起こる。たとえば、”00100100”の 2 の補数は、”11011100”である。

$$00100100 + 11011100 = 1000000000$$

元の数の全てのビットを反転させ、1 を足すことでも求められる。

$$00100100 \xrightarrow{\text{反転}} 11011011 \xrightarrow{+1} 11011100$$

東京大学大学院新領域創成科学研究科　基盤情報学専攻　入試 平成 19 年　専門科目　第 6 問

(1)

この回路はインバータを表す。

Input $= V_{DD}$ のときは、

NM　$V_{OUT} \leq 0$ より、$I_N = 0$
PM　$V_{IN} \geq -V_T$ より、$I_P = 0$

であるから、出力は切り離されている。

Input $= 0$ になると、

NM　$V_{OUT} \leq 0$ より、$I_N = 0$
PM　$V_{IN} \leq -V_T$ かつ $V_{OUT} < 0$ より、$I_P = I_1$

であり、出力容量に I_1 の電流が流れる。これは、PM の V_{OUT} が 0 になるまで、つまり出力容量が V_{DD} に充電されるまで続く。

再び、Input $= V_{DD}$ になると、

NM　$V_{IN} > V_T$ かつ $V_{OUT} > 0$ より、$I_N = I_1$
PM　$V_{IN} \geq -V_T$ より、$I_P = 0$

であり、出力容量から I_1 の電流が流れる。これは、NM の V_{OUT} が 0 になるまで、つまり出力容量が 0 に放電されるまで続く。

Input $= 0$ の期間で出力容量が完全に充電されるか、充電される前に Input $= V_{DD}$ になるかでグラフの波形が異なる。

コンデンサに I_1 が流れ込む時の電圧は、

$$V = \frac{1}{2C_1}\int_0^t I_1 dt = \frac{I_1}{2C_1}t$$

であり、これからコンデンサを V_{DD} まで充電するのにかかる時間 t_1 は、

$$\therefore t_1 = \frac{2C_1V_{DD}}{I_1}$$

である。

$T_1 > t_1$ のとき、

$$\text{Output} = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ \frac{I_1}{2C_1}t & 0 < t \le t_1 \\ V_{DD} & t_1 < t \le T_1 \\ V_{DD} - \frac{I_1}{2C_1}(t - T_1) & T_1 < t \le T_1 + t_1 \\ 0 & T_1 + t_1 < t \end{cases}$$

$T_1 \le t_1$ のとき、

$$\text{Output} = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ \frac{I_1}{2C_1}t & 0 < t \le T_1 \\ \frac{I_1}{2C_1}T_1 - \frac{I_1}{2C_1}(t - T_1) & T_1 < t \le 2T_1 \\ 0 & 2T_1 < t \end{cases}$$

これらをグラフにまとめれば良い。(グラフ略)

(2)

消費エネルギーはコンデンサを充電するのに必要なエネルギーに他ならない。

$T_1 > t_1$ のときは、コンデンサを V_{DD} まで充電するので、

$$E = \frac{1}{2} \cdot 2C_1 \cdot V_{DD}^2 = C_1 V_{DD}^2$$

$T_1 \le t_1$ のときは、コンデンサを $\frac{I_1}{C}T_1$ まで充電するので、

$$E = \frac{1}{2} \cdot 2C_1 \cdot \left(\frac{I_1}{2C_1}T_1\right)^2 = \frac{(I_1T_1)^2}{4C_1}$$

(3)

1 段目の出力からは、2 段目の PM と NM の C_1 が見える。したがって、これを合わせると $2C_1$ の容量が付いているように見え、1 段目の出力は (1) で求めたものと同じである。

パルス幅が大きいとき、つまり $T_1 > t_1$ のときの波形を、2 段目の回路に入力した時の挙動を考える。(1) との違いは入力波形の立ち上がりが緩やかであることである。

$0 < \text{Input} \le V_T$ のときは、

NM　$V_{IN} \le V_T$ より、$I_N = 0$
PM　$V_{OUT} \ge 0$ より、$I_P = 0$

であるから、出力は切り離されている。

$V_T < \text{Input}$ のときは、

NM　$V_{IN} > V_T$ かつ $V_{OUT} > 0$ より、$I_N = I_1$
PM　$V_{OUT} \ge 0$ より、$I_P = 0$

であり、コンデンサに蓄えられた電荷が放電する。

2 段目の出力は、1 段目の出力が V_T を横切ってから変化を始める。つまり、$t_2 = \frac{2C_1V_T}{I_1}$ の遅延をもつインバータ動作をする。

出力の波形は、

$$\text{Output} = \begin{cases} 0 & t \leq t_2 \\ V_{DD} - \frac{I_1}{2C_1}(t - t_2) & t_2 < t \leq t_1 + t_2 \\ 0 & t_1 + t_2 < t \leq T_1 + t_2 \\ \frac{I_1}{2C_1}(t - T_1) & T_1 < t \leq T_1 + t_2 \\ V_{DD} & T_1 + t_2 < t \end{cases}$$

であり、これをグラフにすれば良い。(グラフ略)

(4)

偶数段のインバータに入力された電圧は、そのまま出力に現れる。したがって、この入出力を接続してループを形成しても発振しない。

一方、奇数段のインバータに入力された電圧は、反転されて出力に現れる。反転された電圧が、再びインバータ列に入力されると、さらに反転された出力が現れる。こうしてこの回路は発振する。

N 段のインバータの遅延時間の後に、出力が変化するので、周期 T は、

$$T = 2 \cdot N \cdot t_2 = \frac{2NC_1V_{DD}}{I_1}$$

である。