東京大学大学院工学系研究科　電気系工学専攻　入試
平成 20 年　数学　第 1 問

(1)

存在しないことを背理法を用いて証明する。x が t によらず定数 C となると仮定する。この時、

$$(\text{左辺}) = \ddot{x} = 0$$

$$(\text{右辺}) = -\frac{\dot{x}^2 - 2}{2x} = \frac{1}{C}$$

左辺と右辺を一致させるような定数 C は存在しないので不合理。よって、x が t によらず一定となる解は存在しない。

(2)

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v$$

合成関数の微分

$y = g(u)$ と $u = f(x)$ に対して、

$$\frac{dg(f(x))}{dx} = \frac{dg(u)}{du)}\Big|_{u=f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx}$$

または、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

逆関数の微分

$x = \phi(y)$ を $y = f(x)$ の逆関数とすると、、

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}$$

または、

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

(3)

微分方程式を変形すると、

$$\frac{dv}{dx}\cdot v = -\frac{v^2-2}{2x}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\Big(-\frac{v^2-2}{2v}\Big)$$

$$\int\frac{dv}{-\frac{v^2-2}{2v}} = \int\frac{1}{x}dx + C$$

$$(\text{左辺}) = -\int\Big(\frac{1}{v+\sqrt{2}}+\frac{1}{v-\sqrt{2}}\Big)dv = -(\log|v+\sqrt{2}|+\log|v-\sqrt{2}|)$$

$$(\text{右辺}) = \log|x| + C$$

まとめると、

$$\log|x(v^2-2)e^C| = 0$$

$$\therefore x(v^2-2)e^C = \pm 1$$

である。$x(0)=a$ と $\dot{x}(0)=b$ より、

$$e^C = \pm\frac{1}{a(b^2-2)}$$

$$\therefore x(v^2-2) = \pm a(b^2-2)$$

v について書きかけると、

$$v^2 = 2 \pm \frac{a(b^2-2)}{x}$$

$t=0$ を考えると、複号のマイナスは不適。

$$\therefore v^2 = 2 + \frac{a(b^2-2)}{x}$$

さらに、

$$v = \pm\sqrt{2+\frac{a(b^2-2)}{x}}$$

ここでも、$t=0$ を考えると、複号のマイナスは不適である。

$$\therefore \dot{x} = \sqrt{2+\frac{a(b^2-2)}{x}}$$

別解

初期値を含めて定積分を取る。

$$\int_b^{\dot{x}} \frac{2v}{v^2-1}dv = -\int_a^x \frac{dx}{x}$$

$$\left[\log|v^2-2|\right]_b^{\dot{x}} = -\left[\log|x|\right]_a^x$$

$$\therefore \log\left|\frac{\dot{x}^2-2}{b^2-2}\right| = \log\left|\frac{a}{x}\right|$$

$$\therefore \dot{x} = \sqrt{\frac{a}{x}(b^2-2)+2}$$

絶対値の性質

分数関数の積分を取ると絶対値記号が出てきてしまうので厄介。そこで、絶対値の性質を復習しておく。

$$|\alpha||\beta| = |\alpha\beta|$$

(4)

(3) で得られた式に、$x(0)=1$、$\dot{x}(0)=\sqrt{2}$ を代入する。

$$\dot{x} = \sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2}t + C^{'}$$

ここで、$C^{'}$ は積分定数である。$x(0)=1$ より $C^{'}=1$ であるから、

$$x = \sqrt{2}t + 1$$

(おまけ)

変数分離形

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

1. 左辺に y の項、右辺に x の項をまとめる。
2. 両辺を積分する。

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$$

の形に変形して、両辺の積分をとると、

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$$

1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

定数変化法によって解く。

1. 同次形の微分方程式を解く。
2. 定数 C を $C(x)$ に置き換えて元の微分方程式に代入する。
3. $C(x)$ を求める微分方程式になるので、これを解く。
4. $C(x)$ を代入すると、解が得られる。

$q(x) = 0$ の時を線形同次といい、変数分離形になる。

$$\int \frac{1}{y} dy = -\int p(x) dx$$

$$\therefore \log |y| = -P(x) + c$$

$$\therefore y = Ce^{-P(x)}$$

線形同次の解において、$C = C(x)$ とおいて、元の微分方程式に代入すると、

$$C^{'}(x) = e^{P(x)} q(x)$$

$$\therefore C(x) = \int e^{P(x)} q(x) dx + C$$

$$\therefore y = \left(\int e^{P(x)} q(x) dx + C\right) e^{-P(x)}$$

積分因子によって解く。

1. 微分方程式に積分因子 $e^{\int p(x)dx}$ をかけて変形する。
2. $e^{\int p(x)dx} y$ を求める微分方程式になるので、これを解く。
3. 変形すれば、解が得られる。

微分方程式の両辺に $e^{\int p(x)dx}$ をかけると、

$$e^{\int p(x)dx} \frac{dy}{dx} + e^{\int p(x)dx} p(x) y = e^{\int p(x)dx} q(x)$$

$$(\text{左辺}) = \frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx} y\right)$$

$$\therefore e^{\int p(x)dx} y = \int e^{P(x)} q(x) dx + C$$

$$\therefore y = \left(\int e^{P(x)} q(x) dx + C\right) e^{-P(x)}$$

同次形

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

において、$f(kx, ky) = f(x, y)$ の時、これを同次形の微分方程式と呼ぶ。

1. $y(x) = xz(x)$ とおく。
2. 同次の定義より、$f(x, y) = f(1, z)$ となる。
3. これらより、元の微分方程式は変数分離形に帰着する。

$y(x) = xz(x)$ とおくと、

$$\frac{dy}{dx} = z(x) + x\frac{dz}{dx}$$

であり、

$$f(x, y) = f(x, xz) = f(1, z) = g(z)$$

になる。

したがって、元の微分方程式は、

$$z + x\frac{dz}{dx} = g(z)$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{g(z) - z}{x}$$

というように、変数分離形の微分方程式に帰着する。

完全形

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

において、$\frac{\partial}{\partial y}P(x, y) + \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y) = 0$ の時、これを完全形の微分方程式と呼ぶ。

1. $f(x, y) = \int P(x, y)dx + u(y)$ とおく。
2. $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = Q(x, y)$ となるように、$u(x)$ を定める。
3. 解が $f(x, y) = C$ で与えられる。

$f(x, y) = \int P(x, y)dx + u(y)$ とおくと、

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = P(x, y)$$

ここで、$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = Q(x, y)$ となるように、$u(x)$ を決めると、解は、

$$f(x, y) = C$$

で与えられる。

解の両辺を全微分すると、

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy = 0$$

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

であり、はじめに示した微分方程式の条件を満たすので、これは解である。

ベルヌーイの微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$

1. $z = y^{1-n}$ とおく。
2. 変形すると、z に関する 1 階の線形微分方程式に帰着する。

$z = y^{1-n}$ とおくと、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}z^{\frac{1}{1-n}-1}\frac{dz}{dx}$$

である。これを元の微分方程式に代入すると、

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q$$

という線形微分方程式になる。

リッカチの微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y + q(x)y^2 = R(x)$$

1. 特殊解 y_0 を一つ定める。
2. 特殊解 y_0 を微分方程式に代入。
3. $z = y - y_0$ とおいて、微分方程式に代入。
4. 二つの差をとると、ベルヌーイの微分方程式に帰着する。

一つの特殊解 y_0 が求まったとして、$z = y - y_0$ とおくと、

$$(\frac{dz}{dx} + \frac{dy_0}{dx}) + p(x)(z+y_0) + q(x)(z+y_0)^2 = R(x)$$

y_0 は解であるから、

$$\frac{dy_0}{dx} + p(x)y_0 + q(x)y_0^2 = R(x)$$

これらの差をとると、

$$\frac{dz}{dx} + p(x)z + q(x)(z^2 + 2zy_0) = 0$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} + (p(x) + 2q(x)y_0)z = -q(x)z^2$$

これは、ベルヌーイの微分方程式である。

2 階線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=R(x)$$

2 階線形微分方程式の 2 つの特殊解 $y_1(x)$ と $y_2(x)$ に対して、

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ \frac{dy_1(x)}{dx} & \frac{dy_2(x)}{dx} \end{vmatrix}$$

をロンスキー行列という。

同次形

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0$$

の解 y_1 と y_2 のロンスキー行列が $W(x)\neq 0$ であれば、これらの解は基本解と呼ばれる。同次形の 2 階微分方程式の一般解は基本解の線形結合

$$y=Ay_1+By_2$$

であらわされる。

2 階定数係数微分方程式の同次形

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0$$

$$s^2+as+b=0$$

を特性方程式と呼び、この判別式 $D=\sqrt{a^2-4b}$ によって一般解は異なる。

$D>0$、すなわち特性方程式が相異 2 実解 α と β を持つとき、

$$y=Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x}$$

$D=0$、すなわち特性方程式が重解 α を持つとき、

$$y=Axe^{\alpha x}+Be^{\alpha x}$$

$D<0$、すなわち特性方程式が虚数解 $p\pm iq$ を持つとき、

$$y=Ae^{px}\cos qx+Be^{px}\sin qx$$

2 階定数係数線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=R(x)$$

同次形の微分方程式の基本解 y_1 と y_2 を用いて、一般解を

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$$

とおく。

$C_1(x)$ と $C_2(x)$ は、

$$W(x)\begin{vmatrix}\frac{d}{dx}C_1(x)\\ \frac{d}{dx}C_2(x)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\ R(x)\end{vmatrix}$$

から求められる。

東京大学大学院工学系研究科　電気系工学専攻　入試
平成 20 年　数学　第 2 問

(1)

$$\tilde{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

と置くと、

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathrm{A}} \tilde{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= a x_1^2 + e x_2^2 + (d+b) x_1 x_2 + (g+c) x_1 + (h+f) x_2 + i \end{aligned}$$

これと与式の係数を比較することにより、

$$a = 1$$

$$e = 1$$

$$i = \frac{15}{8}$$

$$d + b = -6$$

$$g + c = 2$$

$$h + f = 4$$

したがって、求める行列は任意定数 p、q、r を用いて、

$$\tilde{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 1 & p & q \\ -p-6 & 1 & r \\ -q-2 & -r+4 & \frac{15}{8} \end{bmatrix}$$

以下では、$\tilde{\mathrm{A}}$ が対象行列となるように p、q、r を定める。

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \frac{15}{8} \end{bmatrix}$$

(2)

$\tilde{\mathrm{A}}$ から、2×2 の成分を取り出して、A とおく。すなわち、

$$\tilde{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{A}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \\ 1 & 2 & \frac{15}{8} \end{bmatrix}$$

である。

$$\mathbf{x}^T \mathrm{A} \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2$$

であり、この A を直交行列 P によって対角化し、$\mathbf{x} = \mathrm{P}\mathbf{y}$ と直交変換することで、

$$\mathbf{x}^T \mathrm{A} \mathbf{x} = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2$$

となる。

A を対角化するために、特性方程式

$$\det(\lambda E - \mathrm{A}) = 0$$

を解く。

$$(\lambda + 2)(\lambda - 4) = 0$$

$$\therefore \lambda = -2, 4$$

固有値 $\lambda = -2$ から、固有ベクトル $[1, 1]^T$ が得られる。固有値 $\lambda = 4$ から、固有ベクトル $[1, -1]^T$ が得られる。これらの固有ベクトルを正規化して並べることで、直交行列 P が得られる。

$$\mathrm{P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

これを用いて、

$$\mathbf{x}^T \mathrm{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathrm{P}^T \mathrm{A} \mathrm{P} \mathbf{y} = -2y_1^2 + 4y_2^2$$

であるから、

$$\alpha_1 = -2$$

$$\alpha_2 = 4$$

また、$\mathbf{x} = \mathrm{P}\mathbf{y}$ より

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 \end{bmatrix}$$

であり、

$$2x_1 + 4x_2 = 3\sqrt{2} y_1 - \sqrt{2} y_2$$

したがって、

$$\beta_1 = 3\sqrt{2}$$

$$\beta_2 = -\sqrt{2}$$

$$\mathrm{P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \\ \cos\frac{\pi}{4} & -\cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$$

であるから、この直交変換は、直線 $x_2 = (\tan\frac{\pi}{8}) x_1$ に関する鏡像である。

実 2 次形式

A が n 次の実対称行列であるとき、

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathrm{A}\mathbf{x}$$

を実 2 次形式という。ここで、$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は 2 次式である。A を対角化する直交行列 P を用いて、

$$\mathbf{x} = \mathrm{P}\mathbf{y}$$

の直交変換を行うと、

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

という形 (標準形) になる。

直交行列

直交行列 P の行列式の値は、±1 のいずれかである。

$\det P = +1$ のときは、

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

という形に変形でき、これは幾何学的には原点まわりの角 θ の回転を表す。

$\det P = -1$ のときは、

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

という形に変形でき、これは幾何学的には直線 $y = (\tan\frac{\theta}{2})x$ に関する鏡像を表す。

(3)

平方完成によって、

$$-2y_1^2 + 3\sqrt{2}y_1 = -2\Big(y_1 - \frac{3}{4}\sqrt{2}\Big)^2 + \frac{9}{4}$$

$$4y_2^2 - \sqrt{2}y_2 = 4\Big(y_2 - \frac{\sqrt{2}}{8}\Big)^2 - \frac{1}{8}$$

であるから、式 (ii) は、

$$-2\Big(y_1 - \frac{3}{4}\sqrt{2}\Big)^2 + 4\Big(y_2 - \frac{\sqrt{2}}{8}\Big)^2 + \frac{9}{4} - \frac{1}{8} + \frac{15}{8} = 0$$

と変形できる。

したがって、

$$z_1 = y_1 - \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

$$z_2 = y_2 - \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$c = \frac{9}{4} - \frac{1}{8} + \frac{15}{8} = 4$$

である。また、この変換は、y_1 方向へ $\frac{3}{4}\sqrt{2}$、y_2 方向へ $\frac{\sqrt{2}}{8}$ の平行移動である。

(4)

$$\alpha_1 z_1^2 + \alpha_2 z_2^2 + c = \tilde{\mathbf{z}}^T \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}}$$

であるから、

$$\tilde{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(2) より、

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathrm{P} & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}$$

(3) より、

$$\tilde{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}}$$

したがって、

$$\tilde{\mathrm{Q}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{7}{8} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(5)

(iii) を変形すると、

$$\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{z_2}{1}\right)^2 = 1$$

であり、これは z_1-z_2 平面における双曲線である。(i) で表わされる二次曲線は、(3) で得られた変換の逆によってこの双曲線を平行移動し、(2) で得られた変換の逆によって鏡像をとったものである。(グラフ略)

二次曲線

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

は座標平面上で楕円を表す。x 軸方向の径が a で、y 軸方向の径が b である。

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

は座標平面上で双曲線を表す。x 軸との交点が $\pm a$ で、漸近線が $y = \pm\frac{b}{a}x$ である。

東京大学大学院工学系研究科　電気系工学専攻　入試
平成 20 年　物理・情報　第 1 問

(1)

運動量保存則より、

$$mv_1 + M \cdot 0 = m(-v_2) + Mv_G$$
$$\therefore v_G = \frac{m}{M}(v_1 + v_2)$$

剛体の運動方程式

物体の運動を記述するために必要な変数の数を自由度という。たとえば、1 次元の質点の運動なら、自由度は 1。3 次元の剛体の運動は、重心の位置と、重心まわりの回転が決まれば完全に決まる。したがって、自由度は 6。運動方程式は未知数を 6 個含む。

重心の運動方程式は、

$$M\ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{F}$$

重心まわりの回転の運動方程式は、

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}$$

である。

この問題では、重心の運動が自由度 1 で、回転の運動が自由度 1 であるから、運動方程式を 2 本立てる。前者を (1) で、後者を (2) で求める。

質点系

3 次元空間に 100 個の質点があるとする。このような系を質点系という。質点 1 つにつき 3 の自由度であるから、この系を記述するには全部で 300 の運動方程式を解く必要がある。

ここに、剛体であるという条件を加えると、上に述べたように自由度は 6 になる。したがって、6 つの運動方程式を解くだけで、この系を記述できる。

(2)

角運動量保存則より、

$$(\frac{l}{2} - d_1)mv_1 = (\frac{l}{2} - d_1)(-mv_2) + I_G\omega$$

である。ここで、I_G は棒の重心周りの慣性モーメントであり、

$$I_G = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{M}{l} x^2 dx = \frac{1}{12} M l^2$$

である。

$$\therefore \omega = \frac{6m(l-2d_1)}{Ml^2}(v_1 + v_2)$$

並進運動と回転運動の関係

まず、並進運動と回転運動の物理量の対応を確認する。

- 質量 m $\longrightarrow$ 慣性モーメント I
- 速度 v $\longrightarrow$ 角速度 ω
- 運動量 p $\longrightarrow$ 角運動量 L
- 力 F $\longrightarrow$ 力のモーメント N

これから以下の式も類推できる。

- $F = \frac{dp}{dt} \longrightarrow N = \frac{dL}{dt}$
- $p = mv \longrightarrow L = I\omega$
- $E = \frac{1}{2}mv^2 \longrightarrow E^{'} = \frac{1}{2}I\omega^2$

(3)

並進運動と回転運動の速度が打ち消しあう点で棒は動かない。求める距離を d とすると、

$$v_G = (d - \frac{l}{2})\omega$$

$$\frac{m}{M}(v_1 + v_2) = (d - \frac{l}{2}) \cdot \frac{12m(\frac{l}{2} - d_1)}{Ml^2}(v_1 + v_2)$$

$$\therefore d = \frac{2l - 3d_1}{3l - 6d_1} l$$

撃力の中心

剛体に撃力を加えたとき、その瞬間には静止したままの点が存在する。これを撃力の中心と呼ぶ。

重心から、撃力の方向と垂直になるように x 軸を取る。この時、撃力の中心は x 軸上にあり、重心からの距離は $\frac{I}{hM}$ である。ここで、I は重心からみた慣性モーメント、h は撃力の加わる位置、M は剛体の質量である。

これを本問に適用すると、

$$I = \frac{1}{12} M l^2$$

$$h = \frac{l}{2} - d_1$$

$$\therefore d = \frac{l}{2} + \frac{\frac{1}{12}Ml^2}{\left(\frac{l}{2} - d_1\right)M} = \frac{2l - 3d_1}{3l - 6d_1}l$$

撃力

ごく短い時間に働く大きな力のことを撃力という。撃力 F に対しては、

$$\bar{F} = \int_t^{t+\Delta t} F dt$$

で定義される力積が、Δt が小さくても有限である。

(4)

(5)

(6)

棒の点 A の周りの慣性モーメントは、

$$I_A = \int_0^l \frac{M}{l} x^2 dx = \frac{1}{3}Ml^2$$

である。求める角速度 ω を用いて、回転の運動方程式を立てると、

$$\frac{d}{dt}(I_A \omega) = \tilde{F} d_2$$

と書ける。ここで、$\tilde{F}$ は、撃力の力で $F = \int \tilde{F} dt$ である。

$$\int d\omega = \frac{3d_2}{Ml^2} \int \tilde{F} dt$$

$$\therefore \omega = \frac{3Fd_2}{Ml^2}$$

慣性モーメントの導出の別解

重心に対して求めた慣性モーメントを利用しても I_A を求められる。

$$I_A = I_G + M(\frac{l}{2})^2 = \frac{1}{3}Ml^2$$

東京大学大学院工学系研究科　電気系工学専攻　入試
平成 20 年　物理・情報　第 5 問

(1)

素子のインピーダンスは

$$Z = R_x + \frac{1}{j\omega C_x}$$

である。電圧源の複素表示を $\dot{E}$ とすると、

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{\dot{E}}{R_x + \frac{1}{j\omega C_x}} = \frac{\omega^2 C_x^2 R_x + j\omega C_x}{\omega^2 C_x^2 R_x^2 + 1}\dot{E}$$

素子を流れる正弦波電流の波高値は、

$$|I| = |\dot{I}| = \frac{\sqrt{\omega^4 C_x^4 R_x^2 + \omega^2 C_x^2}}{\omega^2 C_x^2 R_x^2 + 1}|E| = \frac{\omega C_x}{\sqrt{\omega^2 C_x^2 R_x^2 + 1}}|E|$$

であり、位相 φ は、

$$\varphi = \arg \dot{I} = \tan^{-1}\left(\frac{\omega C_x}{\omega^2 C_x^2 R_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega C_x R_x}\right)$$

である。

複素数の性質を利用した解法

複素数の絶対値と偏角の性質をうまく利用すれば計算量を減らせる。

$$\dot{Z} = R_x + \frac{1}{j\omega C_x} = R_x - j\frac{1}{\omega C_x}$$

$$|I| = \left|\frac{\dot{E}}{\dot{Z}}\right| = \frac{|\dot{E}|}{|\dot{Z}|} = \frac{|E|}{\sqrt{R_x^2 + \frac{1}{\omega^2 C_x^2}}} = \frac{\omega C_x}{\sqrt{\omega^2 C_x^2 R_x^2 + 1}}|E|$$

$$\varphi = \arg \dot{I} = \arg \dot{E} - \arg \dot{Z} = -\tan^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{\omega C_x}}{R_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega C_x R_c}\right)$$

フェーザ法

1. 電流、電圧を複素表示にする。

2. 回路素子をインピーダンス表示する。
3. 直流と同様に電流を求める。
4. 電流の複素数の絶対値が電流の振幅
5. 電流の複素数の偏角が電流の位相

複素数の絶対値

$$|\alpha + i\beta| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

ルートを忘れないように注意。

$$\arg(\alpha + i\beta) = \tan^{-1}(\frac{\beta}{\alpha})$$

複素数の性質

複素数 z_1、z_2 に対して、

$$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg z_1 - \arg z_2$$

用いると便利。

(2)

シェーリングブリッジの左上部分を流れる電流を I_1、右上部分を流れる電流を I_x、左下部分を流れる電流を I_2、右下部分を流れる電流を I_3 とする。シェーリングブリッジの上下端にかかる電圧が $\dot{E}$ であるから、

$$\frac{1}{j\omega C_1}\dot{I}_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C_2}\dot{I}_2 = \dot{E}$$

$$(\frac{1}{j\omega C_x} + R_x)\dot{I}_x + R_3\dot{I}_3 = \dot{E}$$

であり、また検流計 D には電流が流れないから、

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2$$

$$\dot{I}_x = \dot{I}_3$$

である。また、シェーリングブリッジの左右の端子の電位は等しいから、

$$\frac{1}{j\omega C_1}\dot{I}_1 = (\frac{1}{j\omega C_x} + R_x)\dot{I}_x$$

である。以上の 5 式から、I_1、I_x、I_2、I_3、E を消去すると、平衡条件式が得られる。

$$j\omega C_1(\frac{1}{j\omega C_x} + R_x) = R_3(\frac{1}{R_2} + j\omega C_2)$$

実部と虚部を比較すると、

$$C_x R_3 = C_1 R_2$$

$$C_2 R_3 = C_1 R_x$$

検流計

内部抵抗は理想的には 0。そのため、端子間に電位差が生じると無限の電流が流れる。したがって、電位差は 0 でなければならない。

ブリッジ回路の平衡条件式

$$Z_{左上} \times Z_{右下} = Z_{右上} \times Z_{左下}$$

斜めの組み合わせの積が等しい時、検流計に電流が流れない。

(3)

検流計を流れる電流を I_D とする。シェーリングブリッジの上下端にかかる電圧が $\dot{E}$ であるから、

$$\frac{1}{j\omega C}\dot{I}_1 + R\dot{I}_2 = \dot{E}$$

$$\frac{1}{j\omega 2C}\dot{I}_x + R\dot{I}_3 = \dot{E}$$

である。キルヒホッフの電流則より、

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_D + \dot{I}_2$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_D + \dot{I}_x$$

である。またシェーリングブリッジの左右の端子の電位は等しいから、

$$R\dot{I}_2 = R\dot{I}_3$$

である。以上の 5 式から、I_1、I_x、I_2、I_3 を消去すると、

$$\dot{I}_D = -\frac{j\omega C}{2 + j3\omega CR}\dot{E}$$

である。したがって、検流計を流れる正弦波電流の波高値は、

$$|\dot{I}_D| = \frac{\omega C|E|}{\sqrt{4 + 9\omega^2 C^2 R^2}}$$

であり、位相 φ_D は、

$$\varphi_D = \arg \dot{I}_D = \tan^{-1}\left(-\frac{2}{3\omega CR}\right)$$

である。

(おまけ)

電力

　平均電力 (有効電力) は、

$$P_a = \frac{V_m I_m}{2}\cos\varphi$$

V_m は電圧の振幅、I_m は電流の振幅、φ は位相差、$\cos\varphi$ は力率と呼ばれる。複素表示を用いて、

$$P_a = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{V}_m \bar{\dot{I}}_m)$$

と書くこともできる。

　無効電力は、

$$P_r = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\dot{V}_m \bar{\dot{I}}_m)$$

であり、皮相電力は、

$$|P| = \frac{1}{2}|\dot{V}_m \bar{\dot{I}}_m|$$

東京大学大学院工学系研究科　電気系工学専攻　入試
平成 20 年　物理・情報　第 6 問

(1)

オペアンプの反転入力端子の電位は仮想接地により v_B になる。オペアンプの入力インピーダンスは無限大であるから、抵抗 R_1 と R_2 に流れる電流は等しく、

$$\frac{v_B - v_A}{R_1} = \frac{v_C - v_B}{R_2}$$

$$\therefore v_C = -\frac{R_2}{R_1}(v_A - v_B) + v_B$$

(2)

$v_B = 0$ より、

$$v_C = -\frac{R_2}{R_1}v_A$$

したがって、端子 A に流れる電流は、

$$i_A = \frac{v_A - v_C}{R_1 + R_2} = \frac{(1 + \frac{R_2}{R_1})v_A}{R_1 + R_2}$$

$$\therefore \frac{v_A}{i_A} = \frac{R_1 + R_2}{(1 + \frac{R_2}{R_1})} = R_1$$

したがって、端子 A から見た入力インピーダンスは R_1 である。

オペアンプの入力インピーダンスは無限大であるから、端子 B に電流は流れない。したがって、端子 B から見た入力インピーダンスは ∞ である。

オペアンプによる増幅回路

v_B の電位を 0 とすれば、典型的な反転増幅回路である。

$$v_C = -\frac{R_2}{R_1}v_A$$

v_A の電位を 0 とすれば、典型的な非反転増幅回路である。

$$v_C = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)v_B$$

(3)

オペアンプの 1 段目は非反転増幅回路である。2 段目は (1) で得られた式を用いれば求めることができる。

$$v_{out} = -\frac{R_4}{R_3}\{v_2 - (1+\frac{R_2}{R_1})v_1\}v_1$$
$$\therefore v_{out} = (1+\frac{R_4}{R_3})v_2 - \frac{R_4}{R_3}(1+\frac{R_2}{R_1})v_1$$

別解

1 段目のオペアンプの反転入力を仮想接地から v_1、1 段目のオペアンプの出力端子を v_x、2 段目のオペアンプの反転入力を仮想接地から v_2 とする。オペアンプの入力インピーダンスは無限大であるから、R_1 と R_2 に流れる電流は等しく、I_1 とおく。同様に、R_3 と R_4 に流れる電流を I_2 とおく。

$$v_1 = R_1 I_1$$
$$v_x - v_1 = R_2 I_1$$
$$v_2 - v_x = R_3 I_2$$
$$v_{out} - v_2 = R_4 I_2$$

以上の 4 式から v_x、I_1、I_2 を消去すれば v_{out} が得られる。

(4)

v_{out} は、

$$\begin{aligned} v_{out} =& \left(1+\frac{R_4}{R_3}\right)v_2 - \frac{R_4}{R_3}\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)v_1 \\ =& \left(1+\frac{R_4}{R_3}\right)\left\{v_2 - \frac{\frac{R_4}{R_3}(1+\frac{R_2}{R_1})}{1+\frac{R_4}{R_3}}v_1\right\} \end{aligned}$$

と変形できる。求める条件は、

$$\frac{\frac{R_4}{R_3}(1+\frac{R_2}{R_1})}{1+\frac{R_4}{R_3}} = 1$$
$$\therefore R_2 R_4 = R_1 R_3$$

また、

$$G_D = 1 + \frac{R_4}{R_3}$$

(5)

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$ のとき、v_{out} は、

$$v_{out} = 2(v_2 - v_1)$$

である。これをグラフにすれば良い。(グラフ略)

(6)

$R_1 = R_3 = R_4 = R$ および $R_2 = 2R$ のとき、v_{out} は、

$$v_{out} = 2v_2 - 3v_1$$

である。これをグラフにすれば良い。(グラフ略)

(おまけ)

入出力インピーダンス

理想的なオペアンプの入力インピーダンスは ∞、出力インピーダンスは 0 である。これは何を意味するのか。

オペアンプの入力側は、等価的に R_{in} という「抵抗」である。出力側は、R_{out} という「内部抵抗をもつ電圧源」である。

入力電流について、

$$I_{in} = \frac{V_{in}}{R_{in}} = \frac{V_{in}}{\infty}$$

であるから、入力電圧に関わらず、入力側に電流は流れないことを意味する。

出力側については、$R_{out} = 0$ であるから、理想的な電圧源である。したがって、出力電圧と、出力電流は無関係になる。出力電圧は入力電圧によって決まり、出力電流は出力端子に接続される抵抗等によって決まる。

理想電源

理想電圧源は、流れる電流値に関わらず、一定の電圧を保持する。理想電流源は、印加される電圧に関わらず、一定の電流を流し続ける。内部抵抗を考えると混乱するので、この性質だけ理解しておく。

東京大学大学院工学系研究科　電気系工学専攻　入試
平成 20 年　物理・情報　第 9 問

(1)

$$
\begin{aligned}
H(S) =& -p(S_0)\log_2 p(S_0) - p(S_1)\log_2 p(S_1) - p(S_2)\log_2 p(S_2) - p(S_3)\log_2 p(S_3) \\
& - p(S_4)\log_2 p(S_4) - p(S_5)\log_2 p(S_5) - p(S_6)\log_2 p(S_6) \\
=& \frac{5}{32}\log_2\frac{32}{5} + \frac{1}{16}\log_2 16 + \frac{1}{8}\log_2 8 + \frac{11}{32}\log_2\frac{32}{11} \\
& + \frac{1}{8}\log_2 8 + \frac{5}{32}\log_2\frac{32}{5} + \frac{1}{32}\log_2 32 \\
=& 2.52
\end{aligned}
$$

エントロピー

定義は、

$$H = -\sum_{i}^{n} p(i)\log_2 p(i)$$

最大値は、全ての確率が等しいとき、つまり $p(i) = 1/n$ の時で、

$$H_m = \log_2 n$$

冗長度の定義、

$$(\text{冗長度}) = 1 - \frac{H}{H_m}$$

マルコフ過程では、単純にこのエントロピーの定義で求めることができないので注意。今回は「記憶のない情報源」という条件が付いているので問題ない。

マルコフ過程のエントロピーは、

$$H = -\sum_{ij} p(i)p(j|i)\log p(j|i)$$

である。

エントロピーの和は、

$$H = \sum_{j} p_j H_j$$

である。マルコフ過程のエントロピーは、各状態においてエントロピーを計算し、その和をとったものである。

(2)

平均符号長を最少とするために、ハフマンの符号化法を用いと以下のように符号化される。

$$S_0 : 11$$

$$S_1 : 1010$$

$$S_2 : 011$$

$$S_3 : 00$$

$$S_4 : 100$$

$$S_5 : 010$$

$$S_6 : 1011$$

平均符号長 τ は、

$$\tau = 2 \cdot \frac{5}{32} + 4 \cdot \frac{1}{16} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{11}{32} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{5}{32} + 4 \cdot \frac{1}{32}) = \frac{83}{32}$$

ハフマンの符号化法

1. シンボルを確率の順に並べる。
2. 確率の低い 2 つのシンボルに 0 と 1 を当てる。
3. その 2 つのシンボルの確率を足し合わせて新しいシンボルとする。
4. 最初に戻って繰り返す。

平均符号長

平均通信時間と同様。
通報の長さ τ_j と、その生起確率 p_j より、

$$\tau = \sum_j p_j \tau_j$$

(3)

受信側が S_0 のシンボルを受信する確率は、

$$\begin{aligned}
p^{'}(S_0) =& \frac{13}{16} \times p(S_0) + \frac{1}{32} \times p(S_1) + \frac{1}{32} \times p(S_2) + \frac{1}{32} \times p(S_3) \\
&+ \frac{1}{32} \times p(S_4) + \frac{1}{32} \times p(S_5) + \frac{1}{32} \times p(S_6) \\
=& \frac{13}{16} \times p(S_0) + \frac{1}{32} \times \{1 - p(S_0)\} \\
=& \frac{157}{1024}
\end{aligned}$$

同様にして、

$$p^{'}(S_1) = \frac{41}{512}$$

$$p^{'}(S_2) = \frac{33}{256}$$

$$p^{'}(S_3) = \frac{307}{1024}$$

$$p^{'}(S_4) = \frac{33}{256}$$

$$p^{'}(S_5) = \frac{157}{1024}$$

$$p^{'}(S_6) = \frac{57}{1024}$$

(4)

シャノンの定理によれば、情報源のエントロピー H と、通信路容量 C に対して、$H - C$ まであいまい度を低くする符号が存在する。そのような符号を用いることができれば、あいまい度を限界まで下げることができる。

具体的には、符号にパリティビットを加える方法がある。これにより符号の冗長度は上がるが、誤りや損失を検出することができる。

シャノンの第 1 定理

情報源のエントロピーを H、通信路容量を C とする。
(1) この情報源からは単位時間当たり $\frac{C}{H}$ 個の通報数より多くは送れない。
(2) $\frac{C}{H}$ 個以下で送る符号化の方法は常に存在する。

シャノンの第 2 定理

エントロピー H の情報源を、通信路容量が C であり誤りのある系に接続したとき、
(1) $H \leq C$ であれば、誤りの確率をいくらでも 0 に近づける符号化法が存在する。
(2) $H > C$ であれば、そのような符号化はできない。
(3) $H > C$ の時は、あいまい度を $H - C$ にいくらでも近づけることができるが、それ以上は小さくできない。

東京大学大学院工学系研究科　電気系工学専攻　入試
平成 20 年　物理・情報　第 10 問

(1)

(A) の名称は、「プログラムカウンタ」
(D) を用いるプロセッサは、「同期化されたプロセッサ」
このメリットは非同期のプロセッサに比べて、タイミング設計が容易であることと、パイプライン処理を実現するのが容易であることである。

(2)

1 行目〜3 行目で、レジスタ s0、s1、s2 の値を 0 にリセットしている。
4 行目〜5 行目で、レジスタ s1 にアドレス X の値 (211) を、レジスタ s2 にアドレス Y の値 (128) をロードしている。
6 行目で、レジスタ s3 に、s1+s2 の値 (211+128=339) を代入している。
7 行目で、レジスタ s4 に、s1-s2 の値 (211-128=83) を代入している。
8 行目〜9 行目で、レジスタ s3 とレジスタ s4 にレジスタ s0 の値 (0) を加算している。
結局、プログラム終了時において、レジスタ s3 の値は 339、レジスタ s4 の値は 83 である。

(3)

1. ldi s0,0
2. ld s1,X(s0)
3. ls s2,Y(s0)
4. ld s3 Z(s0)
5. add s4,s1,s2
6. add s4,s4,s3
7. st s4,W(s0)

(4)

全体で、$s1 \times s3 + s1 + 4 \times s2$ を計算している。したがって、プログラム終了時に s0 に格納されている値は、22 である。

(5)

0 判定が必要な命令は jz である。バグの影響の回避の仕方は？